

# Frames und Basen

Wolfgang Kreuzer ([wolfgang.kreuzer@oeaw.ac.at](mailto:wolfgang.kreuzer@oeaw.ac.at))



# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                            |           |
|----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>                                          | <b>5</b>  |
| <b>2</b> | <b>Endlich dimensionale Vektorräume</b>                    | <b>7</b>  |
| 2.1      | Basen und Frames . . . . .                                 | 7         |
| 2.1.1    | Weitere Beispiele . . . . .                                | 9         |
| 2.2      | Analyse-, Synthese- und Frameoperatoren . . . . .          | 9         |
| 2.2.1    | Tight Frames . . . . .                                     | 12        |
| 2.2.2    | Frames in $\mathbb{C}^n$ . . . . .                         | 14        |
| 2.2.3    | Ein Beispiel: DFT . . . . .                                | 17        |
| 2.2.4    | Frames in $\mathbb{C}^n$ , Pseudoinverse und SVD . . . . . | 18        |
| 2.2.5    | Frames und Redundanz bei der Rauschunterdrückung . . . . . | 21        |
| 2.3      | Einige Fakten über Frames . . . . .                        | 22        |
| <b>3</b> | <b>Unendlich dimensionale Räume</b>                        | <b>23</b> |
| 3.1      | Das Setting . . . . .                                      | 23        |
| 3.2      | Folgen, Reihen und Konvergenz . . . . .                    | 23        |
| 3.3      | Basen . . . . .                                            | 24        |
| 3.3.1    | Besselfolgen . . . . .                                     | 25        |
| 3.3.2    | Orthonormale Systeme . . . . .                             | 27        |
| 3.3.3    | Riesz Basen . . . . .                                      | 29        |
| 3.3.4    | Die Gram Matrix . . . . .                                  | 32        |
| 3.3.5    | Beispiele für Riesz Basen . . . . .                        | 36        |
| <b>4</b> | <b>Frames in Hilberträumen</b>                             | <b>43</b> |
| 4.1      | Definition von Frames . . . . .                            | 43        |
| 4.2      | Analyse-, Synthese- und Frameoperator . . . . .            | 44        |
| 4.2.1    | Frames und Operatoren . . . . .                            | 51        |
| 4.2.2    | Reduzierung von Frames . . . . .                           | 53        |
| 4.2.3    | Frames und Pre-Frameoperator . . . . .                     | 54        |
| 4.2.4    | Frames als Bild einer Basis . . . . .                      | 55        |
| 4.3      | Stabilität und Störung von Frames . . . . .                | 55        |
| 4.3.1    | Duale Frames . . . . .                                     | 58        |
| 4.4      | Projektion und Frames . . . . .                            | 61        |
| 4.4.1    | Richardson Iteration . . . . .                             | 61        |
| 4.4.2    | Conjugate Gradient Invertierung . . . . .                  | 63        |
| 4.4.3    | Matching Pursuit . . . . .                                 | 63        |
| 4.4.4    | Konvergenz in $\mathbb{C}^N$ . . . . .                     | 64        |
| 4.5      | Anwendung von Frames: Rauschunterdrückung . . . . .        | 65        |

|          |                                                                         |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.5.1    | Oversampling . . . . .                                                  | 67         |
| <b>5</b> | <b>Gabor Frames</b>                                                     | <b>69</b>  |
| 5.1      | Motivation . . . . .                                                    | 69         |
| 5.1.1    | Eine Anwendung: MULACLAB . . . . .                                      | 72         |
| 5.2      | Gaborframes . . . . .                                                   | 72         |
| 5.3      | Fensterfunktion . . . . .                                               | 74         |
| 5.3.1    | Translationsinvariante Systeme . . . . .                                | 76         |
| 5.3.2    | Bedingung im Frequenzbereich . . . . .                                  | 76         |
| 5.3.3    | Kriterien für Gaborframes im Zeitbereich . . . . .                      | 79         |
| 5.3.4    | Zeit-Frequenzbereich . . . . .                                          | 80         |
| 5.4      | Praktische Bedingungen . . . . .                                        | 81         |
| 5.4.1    | B-splines . . . . .                                                     | 85         |
| 5.4.2    | Gaussfunktion . . . . .                                                 | 89         |
| 5.4.3    | Die Rechteckfunktion . . . . .                                          | 89         |
| 5.5      | Duale Gaborframes . . . . .                                             | 90         |
| 5.6      | Zeit-Frequenz-Lokalisierung . . . . .                                   | 95         |
| <b>6</b> | <b>Gaborframes abseits von <math>L^2(\mathbb{R})</math></b>             | <b>97</b>  |
| 6.1      | Fouriertransformation . . . . .                                         | 97         |
| 6.2      | Translation und Modulation . . . . .                                    | 98         |
| 6.3      | Mögliche Klassen von Fenstern . . . . .                                 | 98         |
| 6.4      | Abtasten und Periodisierung . . . . .                                   | 99         |
| 6.5      | Gaborsysteme . . . . .                                                  | 99         |
| 6.5.1    | Wexler-Raz . . . . .                                                    | 100        |
| 6.6      | Zusammenhang der Frames zwischen den Räumen . . . . .                   | 100        |
| 6.6.1    | $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ . . . . .              | 100        |
| 6.6.2    | $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2([0, L])$ . . . . .                     | 102        |
| 6.6.3    | $L^2([0, L]) \rightarrow \mathbb{C}^L$ . . . . .                        | 102        |
| 6.6.4    | $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^L$ . . . . .                 | 103        |
| 6.7      | $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^L$ . . . . .                    | 103        |
| <b>A</b> | <b>Nützliche Dinge</b>                                                  | <b>105</b> |
| A.1      | Zur Erinnerung: Definition und Sätze aus der linearen Algebra . . . . . | 105        |
| A.1.1    | Vektorraum . . . . .                                                    | 105        |
| A.1.2    | Konvergenz . . . . .                                                    | 105        |
| A.1.3    | Hilbertraum . . . . .                                                   | 106        |
| A.1.4    | Operatoren . . . . .                                                    | 107        |
| A.1.5    | Pseudoinverse und orthogonale Projektion . . . . .                      | 108        |
| A.2      | Vertauschbarkeit von Operatoren . . . . .                               | 109        |
| A.2.1    | Vertausch Integral und Summe . . . . .                                  | 109        |
| A.2.2    | Limes und Integral . . . . .                                            | 109        |
| A.2.3    | Vertausch Ableitung Integral . . . . .                                  | 110        |
| A.2.4    | Uneigentliche Integrale erster Art . . . . .                            | 111        |
| A.3      | Translation, Modulation und Fouriertransformation . . . . .             | 112        |
| A.3.1    | Einige Zusammenhänge in $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .                     | 112        |

# Kapitel 1

## Einleitung

Erst einmal vielen Dank für das Interesse an der Vorlesung “Frames und Frametheorie”. Dieses “Skriptum” kann bei Weitem nicht das ganze Themengebiet Frames abdecken, und soll daher nur als Einführung zu diesem Thema dienen und bestimmte Kapitel der Frametheorie abdecken.

Eine der ersten Erwähnungen [7] dieser Klasse von Funktionen geht bereits auf das Jahr 1952 zurück, das Paper hat übrigens lt. Semantic Scholar 739 Zitierungen am Oktoberbeginn. Frames wurden erst so richtig in den 1980ern und 1990ern “populär”, obwohl sie die theoretischen Grundlagen für viele Algorithmen in der Signalverarbeitung bilden, die schon viel früher verwendet wurden. So sind zum Beispiel Spektrogramme, eine Zeit-Frequenz-Darstellung eines Signals, ein fixer Bestandteil der Signalverarbeitung. Im Prinzip sind Frames die theoretischen Grundblöcke von Spektrogrammen und stecken

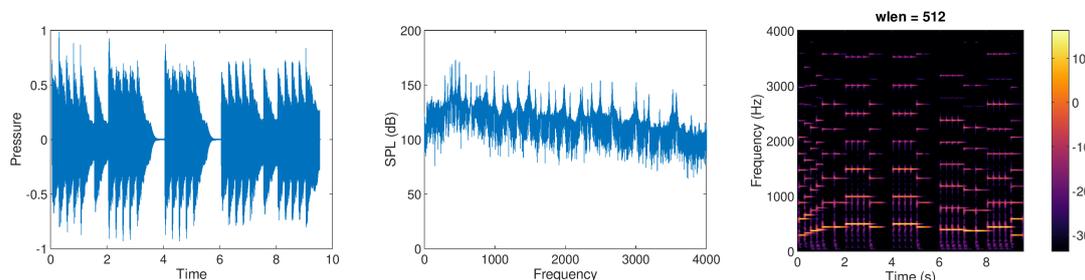


Abbildung 1.1: Zeit-, Frequenz-, und Zeit-Frequenzdarstellung von “Alle meine Entlein”.

auch hinter vielen Algorithmen, mit deren Hilfe Signale (zeit-variant) manipuliert werden können.

Frames sind überbestimmte (redundante) Erzeugendensysteme mit speziellen Eigenschaften. Redundanz ist vielleicht im Zusammenhang mit linearer Algebra und Vektorräumen mit ihren (minimalen) Basen ein wenig ungewohnt, aber Redundanz begleitet uns durchs ganze Leben (z.B. ist Sprache höchst redundant und erlaubt uns deswegen auch sehr effizient zu kommunizieren). Redundanz hat den Vorteil der Effizienz und Robustheit, die mit Hilfe von Framedarstellungen ausgenutzt werden kann. Im Laufe der Vorlesung wird auch das eine oder andere Beispiel präsentiert, wo das der Fall ist.

Worüber soll es also in den nächsten Wochen gehen: Wir beschäftigen uns erst einmal mit dem endlich dimensionalen Fall. Der ist im Zusammenhang mit Frames zwar noch nicht so spannend, aber im Endeffekt wird alles früher oder später auf diesen Fall reduziert werden müssen. So richtig interessant wird es dann im unendlichen dimensionalen Fall, wo

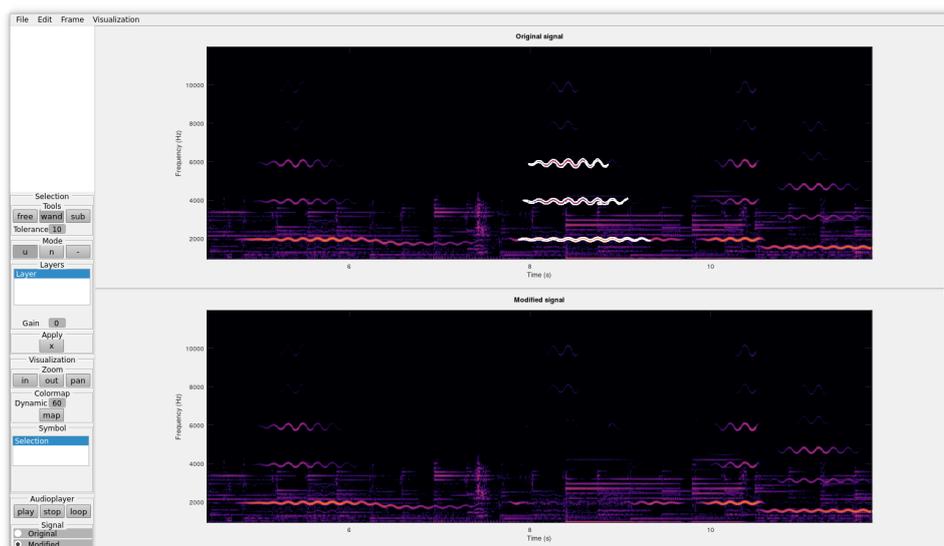


Abbildung 1.2: Beispiel für die Manipulation eines Spektrogramms mit Hilfe von Frames

Frames, die eine abzählbare Familie von Funktionen sind, ihre Stärke ausspielen können. Wir werden uns hier auf Grundlagen von Frames in Hilberträumen beschränken. Das erlaubt es, innere Produkte von Funktionen verwenden zu können, und viele Beweise gehen einfacher.

Als spezielle Klasse von Frames werden wir Gaborframes betrachten, die sich aus Verschieben und Modulieren eines fixen Fensterfunktion  $g \in L^2(\mathbb{R})$  zusammensetzen und die in der Anwendung eine relativ große Verbreitung haben. Aber nachdem es natürlich klar ist, dass mit Funktionen in  $L^2(\mathbb{R})$  praktisch schwer zu arbeiten ist, wird auch noch darauf eingegangen, wie wir von Gaborframes in  $L^2(\mathbb{R})$  auf Frames in  $\mathbb{C}^N$  kommen. Am Ende des “Skriptums” gibt es auch noch einen kleinen Anhang, der einige Dinge aus der Linearen Algebra und aus der Funktionalanalysis in Erinnerung rufen soll, z.B. was ist ein Hilbertraum, wann darf ich Integration und Summe vertauschen, und ähnliche Dinge.

Noch eine kleine Warnung: Es hat sich in den nächsten Seiten sicherlich der eine oder andere kleine Fehler eingeschlichen.

# Kapitel 2

## Endlich dimensionale Vektorräume

Im Folgenden wollen wir davon ausgehen, dass  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einem inneren Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist.

### 2.1 Basen und Frames

**Definition 2.1.1** (Basis). Eine Folge  $\{e_k\}_{k=1}^m$  heißt Basis, wenn:

1. Jedes Element von  $v \in V$  kann mittels einer (endlichen) Linearkombination von  $\{e_i\}_{i=1}^m$  dargestellt werden, d.h.  $v = \sum_{i=1}^m v_i e_i$  und  $V = \text{span}\{e_i\}_{i=1}^m$ ,
2. Die Basiselemente  $\{e_i\}_{i=1}^m$  sind linear unabhängig, d.h. wenn  $\sum_{i=1}^m c_i e_i = 0$  folgt, dass  $c_i = 0$  für all  $i = 1, \dots, m$ .

Gilt darüber hinaus, dass

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

wird  $\{e_i\}_{i=1}^m$  eine Orthonormalbasis genannt. In diesem Fall gilt für jedes  $f \in V$ :  $f = \sum_{i=1}^m \langle f, e_i \rangle e_i$ .

**Definition 2.1.2** (Frame). Eine abzählbare Familie von Vektoren  $\{\phi_k\}_{k \in I}$  in  $V$  ist ein Frame, wenn es zwei konstanten  $A, B > 0$  gibt, sodass

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k \in I} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \forall f \in V.$$

Die Konstanten  $A$  und  $B$  heißen untere und obere Frameschranken.

Gilt darüber hinaus, dass

- $A = B$ , so wird der Frame  $A$ -tight genannt,
- $A = B = 1$ , so wird bilden die  $\{\phi_k\}_{k \in I}$  einen Parseval Frame genannt
- eine Konstante  $c$  existiert, sodass  $\|\phi_k\| = c, \forall k = 1, \dots, m$ , so heißt der Frame Equal-Norm Frame

- (nur) die obere Framebedingung, so sprechen wir von einer *B-Bessel Folge*, oder kurz *Bessel Folge*.
- Gilt für alle Elemente des Frames  $\|\phi_k\|^2 = 1$ , heißt der Frame *normalisiert*

**Bemerkung:** Die Definition von 'Normalisiert' ist nicht eindeutig in der Literatur. Einige Autoren benutzen auch die Bezeichnung 'normalisierter tight Frame' für einen tight Frame mit  $A = 1$ .

**Bemerkung:** In den obigen Definition ist  $I$  eine abzählbare Indexmenge. In diesem Kapitel werden wir in der Regel immer endliche Frames betrachten, d.h.  $I = \{1, \dots, m\}$ .

**Bemerkung:** Für endliche Frames  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ist die obere Framebedingung immer durch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung erfüllt. Die untere Framebedingung ist genau dann erfüllt, wenn  $\text{span}\{\phi_k\}_{k=1}^m = V$ .

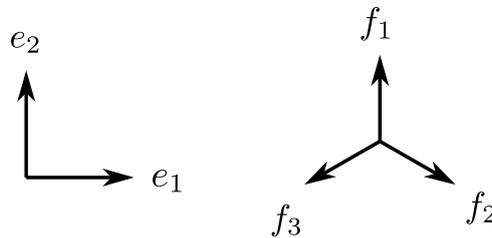


Abbildung 2.1: Beispiel für eine Basis (links) und einen Frame (rechts) in 2D.

**Beispiel:** Als Beispiel für einen Frame in 2D benutzen wir den s.g. Mercedes-Benz Frame:

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \phi_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \phi_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Für diesen Frame lässt sich sehr leicht überprüfen, dass

$$\sum_{k=1}^3 |\langle f, \phi_k \rangle|^2 = \|f\|^2,$$

d.h. dieser Frame ist sogar ein Parzeval Frame, d.h.  $A = B = 1$ .

**Theorem 2.1.3.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  eine Folge im Vektorraum  $V$ . Dann ist  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein Frame für  $W = \text{span}\{\phi_k\}_{k=1}^m$ .

*Beweis.* Wir können einmal sicherlich voraussetzen, dass es mindestens ein  $\phi_k$  gibt, das nicht 0 ist. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich

$$\sum_{k=1}^m |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^m \|f\|^2 \|\phi_k\|^2 = B \|f\|^2$$

also ist die obere Bedingung erfüllt.

Die Einheitssphäre in  $W$  ist kompakt, also gibt es ein Element  $g \in W$  mit

$$A := \sum_{k=1}^m |\langle g, \phi_k \rangle|^2 = \inf \left\{ \sum_{k=1}^m |\langle f, \phi_k \rangle|^2 : f \in W, \|f\| = 1 \right\} > 0,$$

denn wäre  $A = 0$ , müsste auch  $\langle g, \phi_k \rangle = 0$  sein, und damit ist  $g \in W^\perp$ . Für  $f$  nicht auf der Einheitssphäre gilt

$$\sum_{k=1}^m |\langle g, \phi_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^m \langle f/\|f\|, \phi_k \rangle^2 \|f\|^2 \geq A\|f\|^2.$$

□

Damit folgt natürlich auch, dass  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  genau dann ein Frame für  $V$  ist, wenn  $V = \text{span}\{\phi_k\}_{k=1}^m$ . Der große Unterschied zwischen Frame und Basis besteht also in der Tatsache, dass zwar mit beiden Familien jedes Element in  $V$  darstellen kann, dass aber die Darstellung mit Hilfe eines Frames *nicht* notwendigerweise eindeutig sein muss. Ist die Darstellung eines Vektors mit Hilfe eines Frames nicht eindeutig, so sprechen wir von einem *redundanten* (= *overcomplete*) Frame.

Wie wir später sehen werden, erlaubt uns aber ein Frame sogar die Bestimmung der Koeffizienten einer Darstellung. Nachdem die Koeffizienten im Vergleich zu einer Basis im Allgemeinen aber nicht eindeutig sind, erlaubt uns ein Frame mehr Flexibilität.

### 2.1.1 Weitere Beispiele

Betrachten wir einen  $N$ -dimensionalen Hilbertraum  $\mathcal{H}^N$  mit orthonormaler Basis  $\{e_i\}_{i=1}^N$ .

1. Das System  $(e_1, 0, e_2, 0, \dots, e_N, 0)$  bildet einen Parseval Frame
2. Das System

$$\left( e_1, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{e_N}{\sqrt{N}}, \dots, \frac{e_N}{\sqrt{N}} \right)$$

ist ebenfalls ein Parseval Frame für  $\mathcal{H}^N$ .

3. Sei  $\{e'_i\}_{i=1}^N$  eine zweite orthonormale Basis. Dann ist das System  $(e_1, e'_1, e_2, e'_2, \dots, e_N, e'_N)$  ein 2-tight Frame mit 1-Norm. Allgemein, ergibt die Vereinigung von  $L$  orthonormalen Basen einen  $L$ -tight Frame.

## 2.2 Analyse-, Synthese- und Frameoperatoren

Im Zusammenhang mit der Zerlegung von Vektoren (bzw. Signalen) in die Komponenten einer Framedarstellung (= Analyse), bzw. im Zusammenhang mit dem Zusammensetzen von Koeffizienten (Synthese) zu einem Element des Hilbertraums gibt es für jeden Frame drei wichtige Operatoren, die mit ihm in Verbindung stehen:

**Definition 2.2.1.** Sei  $V$  ein Vektorraum. Für einen Frame  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  können wir die folgenden drei Operatoren definieren:

**Der Syntheseoperator**  $T : \mathbb{C}^m \rightarrow V$ , der einem Koeffizientenvektor  $\mathbf{c} = \{c_k\}_{k=1}^m$  ein Element aus  $V$  zuordnet:

$$T\mathbf{c} := \sum_{k=1}^m c_k \phi_k.$$

**Der Analyseoperator (Pre-Frame)**  $T^* : V \rightarrow \mathbb{C}^m$ , der einem Element  $f \in V$  einen Koeffizientenvektor zuordnet:

$$T^* f := \{\langle f, \phi_k \rangle\}_{k=1}^m, \quad \forall f \in V.$$

**Der Frameoperator**  $S : V \rightarrow V$ , der sich aus der Kombination von Analyse- und Syntheseoperator ergibt

$$Sf := TT^* f = \sum_{k=1}^m \langle f, \phi_k \rangle \phi_k.$$

**Bemerkung** Die Bezeichnungen für Analyse- und Syntheseoperator variieren dummerweise von Veröffentlichung zu Veröffentlichung. Manchmal werden Analyse und Syntheseoperatoren mit  $C$  und  $D$  bezeichnet, manchmal tauschen die Rollen von  $T$  und  $T^*$ , während die Benennung in einer anderen Veröffentlichung genau umgekehrt ist. Wir wollen uns hier an die Konvention von [4] halten, und benutzen  $T$  für den Syntheseoperator. Was aber auf jeden Fall gilt, ist die Tatsache, dass der Syntheseoperator die adjungierte Funktion zum Analyseoperator ist und umgekehrt.

Eine Motivation für diese Nomenklatur, die als Eselsbrücke dienen kann, ist, dass wenn wir die einzelnen Framevektoren “nebeneinander” schreiben

$$\mathbf{T} = ( \phi_1 \quad \dots \quad \phi_n )$$

dann ergibt sich der Syntheseoperator  $T\{c\}_{c=1}^n$  aus dem Produkt  $\mathbf{T}\mathbf{c}$ .

**Lemma 2.2.2.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein Frame in  $V$  mit Analyseoperator  $T^*$ . Dann gilt:

$$(i) \quad \|T^* f\|^2 = \sum_{i=1}^m |\langle f, \phi_k \rangle|^2, \quad \forall f \in V.$$

(ii)  $T$  ist der adjungierte Operator zu  $T^*$ .

*Beweis.* Der erste Teil ergibt sich aus der Definition von  $T^*$ . Für den zweiten Teil betrachten wir die Vektoren  $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^m$  und  $f \in V$

$$\langle (T^*)^* \mathbf{c}, f \rangle = \langle \mathbf{c}, T^* f \rangle = \sum_{k=1}^m c_k \overline{\langle f, \phi_k \rangle} = \sum_{k=1}^m c_k \langle \phi_k, f \rangle = \langle T\mathbf{c}, f \rangle$$

□

**Theorem 2.2.3.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein Frame für  $V$  mit Frameoperator  $S$ . Dann gilt folgendes

(i)  $S$  ist selbst adjungiert und invertierbar,

(ii) Für jedes  $f \in V$  gilt:

$$f = \sum_{k=1}^m \langle f, S^{-1} \phi_k \rangle \phi_k = \sum_{k=1}^m \langle f, \phi_k \rangle S^{-1} \phi_k,$$

(iii) Wenn  $f \in V$  auch eine Darstellung  $f = \sum_{k=1}^m c_k \phi_k$  besitzt, gilt

$$\sum_{k=1}^m |c_k|^2 = \sum_{k=1}^m |\langle f, S^{-1} \phi_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^m |c_k - \langle f, S^{-1} \phi_k \rangle|^2.$$

*Beweis.* Dass  $S$  selbst adjungiert ist, ist eine Folge seiner Definition aus Analyse- und Syntheseoperator. Sei nun  $f \in V$  mit  $Sf = 0$ . Dann gilt

$$0 = \langle Sf, f \rangle = \sum_{k=1}^m |\langle f, \phi_k \rangle|^2,$$

was wegen der (unteren) Framebedingung nur heißen kann, dass  $f = 0$ . Somit ist  $S$  injektiv. Damit ergibt sich aber, dass  $S^* = S$  auch surjektiv ist.

Nun gilt aber, dass

$$f = SS^{-1}f = TT^*S^{-1}f = \sum_{k=1}^m \langle S^{-1}f, \phi_k \rangle \phi_k = \sum_{k=1}^m \langle f, S^{-1}\phi_k \rangle \phi_k.$$

Für den zweiten Teil der Identität benutzen wir einfach, dass  $f = S^{-1}Sf$  ist.

Für den letzten Teil nehmen wir an, dass es eine zweite Darstellung von  $f$  durch die Frameelemente gibt:  $f = \sum_{k=1}^m c_k \phi_k$ . Betrachten wir für  $k = 1, \dots, m$

$$c_k = c_k - \langle f, S^{-1}\phi_k \rangle + \langle f, S^{-1}\phi_k \rangle.$$

Nachdem  $f$  auf zwei Arten zusammengesetzt werden kann, gilt

$$f - f = \sum_{k=1}^m (c_k - \langle f, S^{-1}\phi_k \rangle) \phi_k = T \{c_k - \langle f, S^{-1}\phi_k \rangle\}_{k=1}^m = 0$$

also liegt  $(c_k - \langle f, S^{-1}\phi_k \rangle)$  im Kern  $\mathcal{N}(T)$  des Syntheseoperators  $T$ .

Außerdem wissen wir, dass  $\langle f, S^{-1}\phi_k \rangle = \langle S^{-1}f, \phi_k \rangle$  im Wertebereich  $\mathcal{R}(T^*)$  des Analyseoperator  $T^*$  liegt. Weil  $T^*$  und  $T$  zueinander adjungiert sind, gilt  $\mathcal{N}(T) \perp \mathcal{R}(T^*)$  und

$$\sum_{k=1}^m |c_k|^2 = \|\{c_k\}_{k=1}^m\|^2 = \|\{c_k\}_{k=1}^m - \{\langle f, S^{-1}\phi_k \rangle\}_{k=1}^m\|^2 + \|\{\langle f, S^{-1}\phi_k \rangle\}_{k=1}^m\|^2$$

□

Nachdem wir endlich dimensional sind, folgt daraus auch gleich, dass wenn  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein Frame ist, auch  $\{S^{-1}\phi_k\}_{k=1}^m$  ein Frame ist, im speziellen sprechen wir hier vom *kanonischen Dual Frame*.

**Definition 2.2.4** (Dualer Frame). Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein Frame für  $V$  mit Frameoperator  $S$ . Ein Frame  $\{\psi_k\}_{k=1}^m$  für den

$$f = \sum_{k=1}^m \langle f, \psi_k \rangle \phi_k = \sum_{k=1}^m \langle f, \phi_k \rangle \psi_k$$

gilt, wird *dual Frame* genannt. Wenn darüber hinaus  $\psi_k = S^{-1}\phi_k, k = 1, \dots, m$  gilt, sprechen wir vom *kanonischen Dual Frame*.

**Bemerkung** Nachdem ein Frame redundant sein kann, kann ein Frame mehrere duale Frames besitzen. Der kanonische Dual Frame hat die Eigenschaft, dass die Framekoeffizienten, die mit seiner Hilfe berechnet werden, unter allen möglichen Koeffizienten die kleinste  $\ell_2$ -Norm besitzen.

**Beispiel 2.2.5.** Im  $\mathbb{R}^2$  bilden die Vektoren

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \phi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

einen Frame mit Frameoperator

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Der kanonische duale Frame ergibt sich dann aus

$$\psi_{c,1} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi_{c,2} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \psi_{c,3} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Es lässt sich aber auch ganz leicht nachrechnen, dass

$$\psi_{d1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi_{d1,2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \psi_{d1,3} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

und

$$\psi_{d2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi_{d2,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \psi_{d2,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsformel erfüllen, und somit andere duale Frames sind.

Wie schon bei (orthonormalen) Basen, können Frames auch einfach zur Definition von Projektionen verwendet werden.

**Theorem 2.2.6.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein Frame für einen Unterraum  $W$  eines Vektorraums  $V$ . Die orthogonale Projektion von  $V$  auf  $W$  ist dann durch

$$Pf = \sum_{k=1}^m \langle f, S^{-1}\phi_k \rangle \phi_k$$

gegeben

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, dass  $Pf = f, \forall f \in W$  und dass  $Pf = 0, \forall f \in W^\perp$ . Die erste Bedingung ist klar, wegen der Darstellungsformel für Frames, und die zweite Bedingung ergibt sich, weil  $S$  und somit  $S^{-1}$  eine bijektive Abbildung von  $W \rightarrow W$  ist, womit  $S^{-1}\phi_k \in W$  gilt.  $\square$

## 2.2.1 Tight Frames

Zur Erinnerung: Ein Tight Frame ist ein Frame, bei dem unter und obere Frameschranke gleich sind. Dadurch haben diese Frames einige angenehme Eigenschaften.

**Theorem 2.2.7.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein Tight Frame für  $V$  mit Frameschranke  $A$ . Dann gilt  $S = AI$ , wobei  $I$  die Identität ist, und

$$f = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^m \langle f, \phi_k \rangle \phi_k, \forall f \in V.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \langle (S - AI)f, f \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^m \langle f, \phi_k \rangle \phi_k, f \right\rangle - A\|f\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^m \langle f, \phi_k \rangle \langle \phi_k, f \rangle - A\|f\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^m |\langle f, \phi_k \rangle|^2 - A\|f\|^2 = 0 \end{aligned}$$

weil  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein Tight A-Frame ist. Mit dem folgenden Lemma ergibt sich dann, dass  $S - AI = 0$ .  $\square$

Für den Beweis haben wir ein kleines Lemma genutzt, das ohne Beweis hier angeführt wird:

**Lemma 2.2.8.** *Sei  $U$  ein linearer, selbst-adjungierter Operator mit*

$$\langle Uf, f \rangle = 0 \quad \forall f \in V.$$

*Dann gilt  $U = 0$ .*

*Beweis.* Nehmen wir einmal an, dass  $V$  ein komplexer Hilbertraum ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} 4 \langle Uf, g \rangle &= \langle U(f + g), f + g \rangle - \langle U(f - g), f - g \rangle + \\ &\quad + i \langle U(f + ig), f + ig \rangle - i \langle U(f - ig), f - ig \rangle \end{aligned}$$

und damit gilt  $\langle Uf, g \rangle = 0, \forall f, g \in V$ , wenn  $\langle Uf, f \rangle = 0, \forall f \in V$  und somit  $U = 0$ .

Für eine reellen Hilbertraum benutzen wir die orthonormale Basis  $\{e_i\}_{i=1}^N$ . Für beliebige Indizes  $i, j \in 1, \dots, N$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle U(e_i + e_j), e_i + e_j \rangle &= \langle Ue_i, e_i \rangle + \langle Ue_i, e_j \rangle + \langle Ue_j, e_i \rangle + \langle Ue_j, e_j \rangle = \\ &= \langle Ue_i, e_i \rangle + \langle Ue_i, e_j \rangle + \langle e_i, Ue_j \rangle + \langle Ue_j, e_j \rangle \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass  $U$  selbstadjungiert ist, folgt dann, dass

$$\langle Ue_i, e_j \rangle = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, N,$$

und somit die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung:** Im reellen Fall ist die Voraussetzung der Selbstadjungiertheit wichtig. Als Gegenbeispiel kann hier die Rotation um 90 Grad dienen.

**Bemerkung:** D.h. tight Frames haben die angenehme Eigenschaft, dass das kanonische Dual eine skalierte Version des Frames ist, und der Frameoperator nicht explizit invertiert werden muss.

**Bemerkung:** Ohne Beweis: In einem Vektorraum mit Dimension  $n$  kann jeder Frame durch Hinzugeben von  $n - 1$  speziell gewählten Vektoren zu einem tight Frame transformiert werden. Die Idee dahinter beruht auf der Tatsache, dass der Vektorraum eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren  $\{e_i\}_{i=1}^n$  zum Eigenwert  $\lambda_i$  des Frameoperators  $S$  besitzt. Definieren wir nun  $h_k = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_k} e_k$  kann gezeigt werden, dass die Vereinigung  $\{\phi_k\}_{k=1}^m \cup \{h_k\}_{k=2}^n$  ein tight Frame ist.

In endlich dimensionalen Räumen können wir Operatoren leicht mit Matrizen identifizieren

**Theorem 2.2.9.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein Frame mit Frameoperator  $S$  für einen Vektorraum  $V$  mit Dimension  $\dim(V) = n$ . Dann gilt

(i) Die optimale untere und obere Frameschranke ergeben sich als der kleinste, bzw. größte Eigenwert von  $S$ ,

(ii) Seien  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  die Eigenwerte für  $S$  mit ihrer dementsprechenden Vielfachheit. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{k=1}^m \|\phi_k\|^2,$$

(iii) Ist  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein tight Frame und  $\|\phi_k\| = 1$  für alle  $k$ , so gilt  $A = \frac{m}{n}$

*Beweis.* Nachdem  $S$  selbst adjungiert ist, wissen wir aus der linearen Algebra, dass  $V$  eine orthonormale Basis besitzt, die sich aus den Eigenvektoren  $\{e_i\}_{i=1}^n$  von  $S$  zu den Eigenwert  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  zusammensetzt. Nachdem  $\{e_i\}_{i=1}^n$  eine orthonormal Basis ist, gilt  $f = \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle e_i$  und  $Sf = \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle S e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle f, e_i \rangle e_i$ . Dann gilt auch  $\sum_{k=1}^m |\langle f, \phi_k \rangle|^2 = \langle Sf, f \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\langle f, e_i \rangle|^2$  und somit

$$\lambda_{\min} \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^m |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq \lambda_{\max} \|f\|^2.$$

Somit ist einmal gezeigt, dass die beiden Eigenwerte Frameschranken sind, weil  $S$  ein positiver Operator ist. Dass sie optimal sind, ergibt sich, wenn wir für  $f$  die jeweiligen Eigenvektoren benutzen.

Für den zweiten Teil verwenden wir, dass

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle S e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m |\langle e_i, \phi_k \rangle|^2.$$

Wir vertauschen nun die Summationsreihenfolge, und weil bei einer Orthogonalbasis die Norm einer Funktion durch die Norm der Koeffizienten ihrer Darstellung durch die Basis ersetzt werden kann, folgt  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{k=1}^m \|\phi_k\|^2$ .

Damit folgt aber auch für einen tight A-Frame, der auch normalisiert ist, dass

$$nA = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{k=1}^m \|\phi_k\|^2 = m.$$

□

## 2.2.2 Frames in $\mathbb{C}^n$

Wenn wir über endlich dimensionale Vektorräume sprechen, kommen wir nicht um die Räume  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  herum, die die klassischen Beispiele für endlich dimensionale Räume

sind. In diesem und den folgenden Abschnitten wollen wir uns mit  $\mathbb{C}^n$  mit innerem Produkt

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \langle \{c_i\}_{i=1}^n, \{d_i\}_{i=1}^n \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \bar{d}_i$$

beschäftigen. Die dementsprechende Theorie für  $\mathbb{C}^n$  lässt sich jedoch leicht auf  $\mathbb{R}^n$  übertragen.

Erinnern wir uns an die lineare Algebra und die Verbindung zwischen Basen, Matrizen und linearen Operatoren. Betrachten wir um Beispiel einen Operator  $\mathcal{O} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  und die jeweiligen kanonischen Basen  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$  und  $\{\tilde{\mathbf{e}}_j\}_{j=1}^m$  in den jeweiligen Räumen, so gilt

$$\mathcal{O}(\mathbf{v}) = \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathcal{O}(\mathbf{e}_i) v_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \langle \mathcal{O}(\mathbf{e}_i), \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle \tilde{\mathbf{e}}_j\right) v_i$$

bzw. in Matrixform mit der  $m \times n$  Matrix  $\mathbf{O}$

$$\mathbf{O}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \langle \mathcal{O}(\mathbf{e}_1), \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathcal{O}(\mathbf{e}_n), \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathcal{O}(\mathbf{e}_1), \tilde{\mathbf{e}}_m \rangle & \cdots & \langle \mathcal{O}(\mathbf{e}_n), \tilde{\mathbf{e}}_m \rangle \end{pmatrix} \mathbf{v}.$$

Etwas ähnliches ist natürlich auch mit Frames möglich. Betrachten wir zum Beispiel einen Frame  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  mit Syntheseoperator  $T$ , so lässt sich  $T$  durch die  $n \times m$  Matrix

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} | & | & \cdot & \cdot & | \\ \phi_1 & \phi_2 & \cdot & \cdot & \phi_m \\ | & | & \cdot & \cdot & | \end{pmatrix}$$

darstellen.

Nachdem Synthese- und Analyseoperator zueinander adjungiert sind, ergibt sich die Matrix für den Analyseoperator  $T^*$  durch  $\mathbf{T}^H$ . Als die Kombination beider Operatoren kann dann der Frameoperator  $S$  durch die  $n \times n$  dimensionale Matrix  $\mathbf{S} = \mathbf{T}\mathbf{T}^H$  repräsentiert werden.

Darüber hinaus, lässt sich zeigen, dass sich ein Frame  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  in  $\mathbb{C}^n$  als Projektion einer Basis in  $\mathbb{C}^m$  auf  $\mathbb{C}^n$  ergibt:

**Theorem 2.2.10.** *Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein Frame<sup>1</sup> für  $\mathbb{C}^n$ . Dann gilt:*

- (i) *Die einzelnen Frameelemente  $\phi_k$  können als die ersten  $n$  Koordinaten von Basisvektoren in  $\mathbb{C}^m$  interpretiert werden,*
- (ii) *Ist  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  tight, kann das Frameelement  $\phi_k$  durch die ersten  $n$  Koordination einer orthogonalen Basis für  $\mathbb{C}^n$  dargestellt werden.*

*Beweis.* Wenn wir den Analyseoperator  $T^* : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ ,  $T^* \mathbf{c} = \{\langle \mathbf{c}, \phi_k \rangle\}_{k=1}^m = \{\phi_k^H \mathbf{c}\}_{k=1}^m$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$  betrachten, so können wir  $T^*$  auch als über Matrix  $\mathbf{T}^H$  darstellen:

$$\mathbf{T}^H = \begin{pmatrix} \text{---} & \bar{\phi}_1 & \text{---} \\ \text{---} & \bar{\phi}_2 & \text{---} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{---} & \bar{\phi}_m & \text{---} \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>Damit folgt aber auch implizit, dass  $m \geq n$ .

Nachdem  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein Frame ist, folgt aus der untereren Framebedingung, dass  $\mathbf{T}^H \mathbf{c} = 0$  nur dann gilt, wenn  $0 = \|\mathbf{T}^H \mathbf{c}\|^2 = \sum_{k=1}^m |\langle \mathbf{c}, \phi_k \rangle|^2$ , also wenn  $\mathbf{c} = 0$  ist. Also sind die Spalten von  $\mathbf{T}^H$  linear unabhängig, und sie können durch Hinzufügen von  $m-n$  geeigneten Vektoren auf ein linear unabhängiges System der Dimension  $m$  erweitert werden. Diese Vektoren können zum Beispiel durch die Basis des orthogonalen Komplements vom  $\mathbb{C}^n$  in  $\mathbb{C}^m$  gebildet werden.

Für einen tight Frame gilt, dass  $TT^* = S = AI$ , wobei  $I$  die Identität in  $\mathbb{C}^n$  und  $A$  die untere Frameschranke sind. Das bedeutet, dass die Spalten von  $\mathbf{T}$  ein orthogonales System bilden, das mit Hilfe einer orthogonalen Basis vom orthogonalem Komplement von  $\text{span}\{\mathbf{T}\}$  in  $\mathbb{C}^m$  zu einer Orthogonalbasis für  $\mathbb{C}^m$  erweitert werden kann  $\square$

Umgekehrt können wir uns natürlich auch die Frage stellen, wann die Spalten einer  $m \times n$  Matrix einen Frame für  $\mathbb{C}^n$  bilden:

**Theorem 2.2.11.** *Sei  $\mathbf{\Lambda}$  eine  $m \times n$  Matrix mit komplex-wertigen Einträgen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es gibt eine Konstante  $A > 0$  mit*

$$A\|\mathbf{c}\|^2 \leq \|\mathbf{\Lambda}\mathbf{c}\|^2, \forall \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n.$$

(ii) *Die Spalten von  $\mathbf{M}$  bilden eine Basis für ihre linear Hülle in  $\mathbb{C}^m$*

(iii) *Die Zeilen der Matrix sind ein Frame für  $\mathbb{C}^n$*

*Beweis.* Sei  $g_j \in \mathbb{C}^m$  durch die  $j$ -te Spalte von  $\mathbf{\Lambda}$  gegeben. Dann gilt

$$A \sum_{j=1}^n |c_j|^2 \leq \|\mathbf{\Lambda}\mathbf{c}\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{g}_j \right\|^2.$$

Damit folgt aber, dass die Spalten linear unabhängig sind, weil

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{g}_j \rightarrow 0 = \left\| \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{g}_j \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n \Lambda_{ij} c_j \right|^2 = \|\mathbf{\Lambda}\mathbf{c}\|^2 \geq A\|\mathbf{c}\|^2 \rightarrow \|\mathbf{c}\| = 0$$

Betrachten wird nun die  $k$ -te Zeile von  $\mathbf{\Lambda}$  als Vektor  $\phi_k \in \mathbb{C}^n$ , so gilt

$$A\|\mathbf{c}\|^2 \leq \|\mathbf{\Lambda}\mathbf{c}\|^2 = \sum_{k=1}^m \left| \sum_{j=1}^n \Lambda_{kj} c_j \right|^2 = \sum_{k=1}^m |\langle \phi_k, \bar{\mathbf{c}} \rangle|^2, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$$

und somit ist die untere Framebedingung für  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  erfüllt, und damit bilden die  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  bereits einen Frame in  $\mathbb{C}^n$ .  $\square$

Damit folgt auch ein netter Zusammenhang zwischen Spalten  $\mathbf{g}_k$  und Zeilen  $\phi_k$

**Korollar 2.2.12.** *Sei  $\mathbf{\Lambda}$  eine  $m \times n$  Matrix mit komplex wertigen Einträgen. Die Zeilen  $\phi_k, k = 1, \dots, m$  bilden genau dann einen Frame, wenn für die Spaltenvektoren  $\mathbf{g}_j, j = 1, \dots, n$*

$$A\|\mathbf{c}\|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{g}_j \right\|^2 \leq B\|\mathbf{c}\|^2, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$$

mit  $A, B > 0$  gilt.

### 2.2.3 Ein Beispiel: DFT

Ein wichtiges Werkzeug in der Akustik ist die diskrete Fourier Transformation (DFT). Mit ihrer Hilfe können abgetastete Signale vom Zeitbereich in den Frequenzbereich transformiert werden, um sie so besser untersuchen zu können.

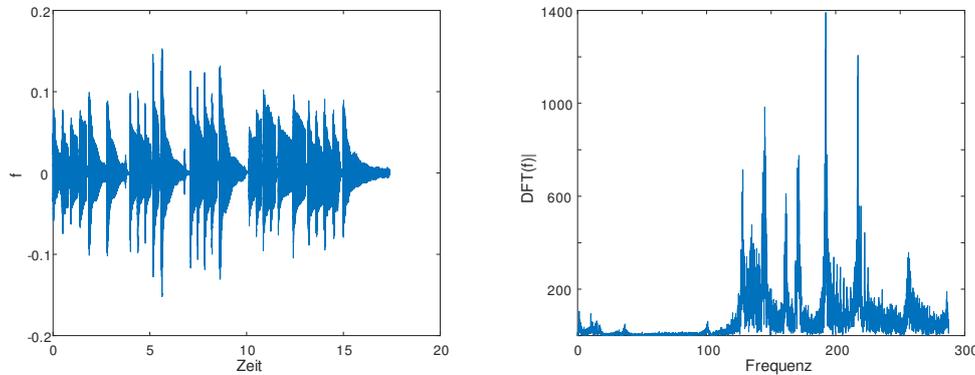


Abbildung 2.2: Zeitdarstellung eines Signals und die Frequenzdarstellung mittels DFT

**Bemerkung:** So ganz nebenbei, bei der DFT handelt es sich als Abbildung von  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  nur um eine Annäherung der Fouriertransformation. Der Einfachheit halber nehmen wir einmal an, dass die Abtastgitter sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich gleiche Länge haben.

**Definition 2.2.13.** Sei  $\mathbf{f} = (f[0], f[1], \dots, f[n-1]) \in \mathbb{C}^n$ . Die diskrete Fouriertransformation  $\mathcal{F} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : \mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{f})$  ist definiert als

$$F[j] = \sum_{k=0}^{n-1} f[k] e^{-2\pi i j k / n}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

Die inverse Transformation ist durch

$$f[j] = (\mathcal{F}^{-1} \mathbf{F})[j] = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F[k] e^{2\pi i j k / n}.$$

gegeben.

Definieren wir nun

$$\mathbf{e}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} (1, e^{2\pi i(k-1)/n}, e^{4\pi i(k-1)/n}, \dots, e^{2\pi i(n-1)(k-1)/n})$$

so bilden die  $\mathbf{e}_k$  eine orthonormale Basis (= diskrete Fourier Basis) für  $\mathbb{C}^n$ , d.h. jedes Element aus  $\mathbb{C}^n$  hat eine Darstellung

$$\mathbf{f} = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k.$$

Auf gleiche Art können wir aber auch einen (tight) Frame für  $\mathbb{C}^n$  definieren:

**Theorem 2.2.14.** Seien  $m > n$  und  $\{\phi_k\}_{k=1}^m \in \mathbb{C}^n$  durch

$$\phi_k = \frac{1}{\sqrt{m}} (1, e^{2\pi i(k-1)/m}, \dots, e^{2\pi i(n-1)(k-1)/m})^\top, \quad k = 1, \dots, m$$

gegeben. Dann ist  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein tighter, redundanter Frame in  $\mathbb{C}^n$  mit Frameschranke  $A = 1$  und  $\|\phi_k\|^2 = n/m$  für alle  $k$

*Beweis.* Der Raum  $\mathbb{C}^n$  kann als Unterraum von  $\mathbb{C}^m$  interpretiert werden, und es gibt eine orthogonale Projektion  $P : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Betrachten wir  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^m$  als Basis von  $\mathbb{C}^m$  und  $\phi_k = P\mathbf{e}_k$  als Bild der orthogonalen Projektion. Nachdem  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^m$  eine orthonormale Basis ist, gilt für jedes  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^m$ :

$$\|\mathbf{f}\|^2 = \sum_{k=1}^m |\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^m |\langle P(\mathbf{f}), \mathbf{e}_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^m |\langle \mathbf{f}, P(\mathbf{e}_k) \rangle|^2 = \sum_{k=1}^m |\langle \mathbf{f}, \phi_k \rangle|^2$$

weil die orthogonale Projektion per Definition selbst adjungiert ist.  $\square$

## 2.2.4 Frames in $\mathbb{C}^n$ , Pseudoinverse und SVD

In den vorigen Abschnitten haben wir gesehen, wie Frames in  $\mathbb{C}^n$  über Matrizen dargestellt werden können, und es ergibt sich natürlich die Frage, wie es denn mit den dualen Frames aussieht, womit wir schon bei Begriffen wie (Moore-Penrose) Pseudoinverse und Singulärwertzerlegung angekommen sind.

**Theorem 2.2.15** (Singulärwertzerlegung). Für eine  $n \times m$  Matrix  $\mathbf{H}$ , mit  $r = \text{Rang}(\mathbf{H}) > 1$  existiert eine Zerlegung der Form

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H,$$

wobei  $\mathbf{V}$  eine unitäre  $m \times m$  Matrix,  $\mathbf{U}$  eine unitäre  $n \times n$  Matrix sind und

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine  $m \times n$  Matrix mit  $\Sigma := \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2)$  ist. Die Pseudoinverse  $\mathbf{H}^\dagger$  von  $\mathbf{H}$  ist dann durch

$$\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{V}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}^H,$$

gegeben, wobei die  $n \times m$  Matrix

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\Sigma^{-1} := \text{diag}(\frac{1}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r^2})$  definiert wird

Mit dieser Definition sind auch die Bedingungen erfüllt, die Penrose für eine Pseudoinverse gezeigt hat

- $\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger\mathbf{H} = \mathbf{H}$
- $\mathbf{H}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}^\dagger$

- $(\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H})^H = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}$
- $(\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger)^H = \mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger$

Zusätzliche nette Eigenschaften sind z.B.:

- Bei vollem Spaltenrang, d.h.  $\text{rank}(\mathbf{H}) = n \leq m$ , gilt:
  - $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  ist invertierbar
  - $\mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$
  - $\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} = \mathbf{I}_n$ .
- Bei vollem Zeilenrang  $\text{rank}(\mathbf{H}) = m \leq n$  gilt:
  - $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  ist invertierbar
  - $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{H}^H)^{-1}$
  - $\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{I}_m$
- $\mathbf{H}^\dagger \mathbf{y}$  die Lösung mit minimaler Energie des Minimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2.$$

Mit dem letzten Punkt kommen wir wieder in Richtung Frames.

Zur Erinnerung:

- Schreiben wir die Elemente eines Frames  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  als *Spalten* in eine Matrix, bekommen wir eine Matrixdarstellung des Syntheseoperators  $T$ .
- Der Analyseoperator  $T^*$  ergibt sich dann aus der transponierten dieser Matrix
- Für den Frameoperator  $S = TT^*$  gilt dann  $\mathbf{S} = \mathbf{T}\mathbf{T}^H$ .
- Elemente  $\psi_k$  des kanonischen Dualframes wurden über die inverse des Frameoperators definiert:  $\psi_k = S^{-1}\phi_k$ .
- Benutzen wir wieder die Matrixschreibweise, können Elemente des dualen Frames in den *Zeilen* von  $\tilde{\mathbf{T}}$  aufgelistet werden

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T} = (\mathbf{T}\mathbf{T}^H)^{-1}\mathbf{T} = (\mathbf{T}^\dagger)^H,$$

bzw.

$$\mathbf{T}^\dagger = \begin{pmatrix} \text{---} & \overline{S^{-1}\phi_1} & \text{---} \\ \text{---} & \overline{S^{-1}\phi_2} & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \overline{S^{-1}\phi_m} & \text{---} \end{pmatrix}.$$

**Beispiel:**

Nehmen wir als Beispiel den Mercedes Benz Frame

$$\mathbf{D} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Pseudoinverse dazu ist

$$\mathbf{D}^\dagger = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \langle \mathbf{c}, \psi_k \rangle \phi_k &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}v_2 \end{pmatrix} + \left( \frac{1}{\sqrt{3}}c_1 - \frac{1}{3}c_2 \right) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}c_1 - \frac{1}{3}c_2 \right) \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Konstruktion der Pseudoinversen über die Singulärwertzerlegung erlaubt uns aber auch noch, die Konstruktion anderer “Inversen” und damit die Konstruktion anderer dualer Frames. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die  $n \times m$  Matrix  $\mathbf{T}$  maximalen Rang  $n$  hat, wobei  $m > n$ . Das heißt, die Singulärwertzerlegung von  $\mathbf{T}$  ist durch

$$\mathbf{T} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \end{pmatrix} \mathbf{V}^H$$

gegeben, und für die Pseudoinverse wird die Matrix

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

verwendet, wobei  $\Sigma$  eine  $n \times n$  Diagonalmatrix ist. Anstelle der Matrix  $\mathbf{S}^{-1}$  dürfen wir aber auch die Matrix

$$\mathbf{S}_P^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} \\ P \end{pmatrix}$$

verwenden, wobei  $P$  eine  $(m - n) \times (m - n)$  Matrix ist, weil

$$\mathbf{T}\mathbf{T}_P^\dagger = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H\mathbf{V}\mathbf{S}_P^{-1}\mathbf{U}^H = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \end{pmatrix} \mathbf{I}_m \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} \\ P \end{pmatrix} \mathbf{U}^H = \mathbf{U}\mathbf{I}_n\mathbf{U}^H = \mathbf{I}_n.$$

Die Redundanz eines überbestimmter Frame bedeutet ja im Prinzip, dass zur Darstellung eines Elements des Vektorraums mehr Vektoren verwendet werden können, als notwendig wären. Aber was bedeutet “mehr als notwendig”, bzw. wieviele Elemente können aus einem redundanten Frame entfernt werden, damit die restlichen Frameelemente immer noch einen Frame bilden?

**Theorem 2.2.16.** *Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein normalisierter Frame in  $\mathbb{C}^n$  (mit  $n < m$ ) mit unterer Frameschranke  $A > 0$  und sei  $I$  eine Indexmenge  $I \subset \{1, \dots, m\}$  mit  $|I| < A$ . Dann ist die Familie  $\{\phi_k\}_{k \notin I}$  ein Frame in  $\mathbb{C}^n$  mit unterer Schranke  $A - |I|$ .*

*Beweis.* Um die Sache einfacher zu machen, nehmen wir einmal an, dass  $I$  nur aus einem Index  $k'$  besteht. Dann gilt

$$\sum_{k \notin I} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^m |\langle f, \phi_k \rangle|^2 - |\langle f, \phi_{k'} \rangle|^2 \geq A \|f\|^2 - \|f\|^2 \|\phi_{k'}\|^2 \geq (A-1) \|f\|^2$$

□

### 2.2.5 Frames und Redundanz bei der Rauschunterdrückung

Angenommen wir wollen ein Signal  $f$  (z.B. ein Vektor fixer Länge) vom Sender  $\mathcal{S}$  zum Empfänger  $\mathcal{E}$  mit Hilfe eines Frames  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  schicken. Das Signal  $f$  wird mit Hilfe von  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  analysiert und die Framekoeffizienten  $c_k = \langle f, \phi_k \rangle$  nach  $\mathcal{E}$  geschickt, wo das Signal wieder zusammengesetzt wird:

$$f = \sum_{k=1}^m \langle f, \phi_k \rangle S^{-1} \phi_k.$$

Nehmen wir zusätzlich noch an, dass auf dem Weg von  $\mathcal{S}$  nach  $\mathcal{E}$  das Signal gestört wird, d.h. am Empfänger kommt nicht  $c_k$  an, sondern ein verrauschtes Signal  $\tilde{c}_k = c_k + \eta_k$ , wobei vorausgesetzt wird, dass die  $\eta_k$  voneinander unabhängige Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{E}(\eta_k) = 0, \quad \mathbb{E}(\eta_k \eta_{k'}) = \sigma^2 \delta_{k,k'}$$

sind. Wird das Signal beim Empfänger wieder zusammengesetzt, erhalten wir also

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^m \tilde{c}_k S^{-1} \phi_k = \sum_{k=1}^m (\langle f, \phi_k \rangle + \eta_k) S^{-1} \phi_k = f + \sum_{k=1}^m \eta_k S^{-1} \phi_k$$

und den (stochastischen) Fehlervektor  $\Delta := f - \tilde{f}$ . Betrachten wir die mittleren quadratische Abweichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \frac{1}{m} \mathbb{E} \left( \|f - \tilde{f}\|^2 \right) = \frac{1}{m} \mathbb{E} \left( \left\langle \sum_{k=1}^m \eta_k S^{-1} \phi_k, \sum_{k'=1}^m \eta_{k'} S^{-1} \phi_{k'} \right\rangle \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \sum_{k'=1}^m \mathbb{E}(\eta_k \eta_{k'}) \langle S^{-1} \phi_k, S^{-1} \phi_{k'} \rangle = \frac{1}{m} \sigma^2 \sum_{k=1}^m \|S^{-1} \phi_k\|^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ziel ist es nun, eine Frame zu konstruieren, mit dem der Fehler Gl. (2.1) möglichst klein gehalten werden kann. Ganz nebenbei bemerkt, bei einer Orthonormalbasis  $\{e_j\}_{j=1}^n$  wäre dieser Fehler immer  $\text{MSE} = \sigma^2$ , bei einem Frame gibt es zumindest die Hoffnung, dass sich einzelne Komponenten aufheben können.

**Theorem 2.2.17.** *Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein normalisierter Frame in  $\mathbb{R}^n$  mit fix vorgegeben  $m$  und  $n$ . Die mittlere quadratische Abweichung ist genau bei tight Frames am kleinsten.*

*Beweis.* Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  die Eigenwerte zum Frameoperator  $S$  von  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$ , dann gilt

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = \sum_{k=1}^m \|\phi_k\|^2 = m$$

Betrachten wir den kanonischen Dualframe  $\{S^{-1}\phi_k\}_{k=1}^m$ , so hat der duale Frameoperator die Eigenwerte  $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ , und die mittlere quadratische Abweichung ergibt sich aus

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j}. \quad (2.2)$$

Anstelle das Minimum für Gl. (2.2) zu suchen, lösen wir folgendes Problem: Finde

$$\max \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j}} \quad (2.3)$$

unter der Bedingung, dass  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = m$ . Bis auf eine Konstante beschreibt Gl. (2.3) den harmonischen Mittelwert, der immer kleiner als der arithmetische Mittelwert ist, d.h.

$$\frac{n}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j}} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda_j, \quad (2.4)$$

wobei Gleichheit nur dann gilt, wenn alle  $\lambda_j$  gleich sind. Das lässt sich am einfachsten mit Hilfe der Cauchy-Schwarzen Ungleichung zeigen. Seien  $\Lambda := (\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^\top$  und  $\Lambda^{-1} := (\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})^\top$ . Dann folgt

$$n^2 = |\langle \Lambda, \Lambda^{-1} \rangle|^2 \leq \|\Lambda\|^2 \|\Lambda^{-1}\|^2.$$

Das Maximum in Gl. (2.4) wird also erreicht, wenn all  $\lambda_i$  den gleichen Wert  $\lambda_i = \frac{m}{n}$  haben. Das heißt, der Frame muss tight sein, und die kleinste mittlere quadratische Abweichung ergibt sich durch:

$$\text{MSE} = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} = \frac{n}{m} \sigma^2.$$

Je mehr Element der Frame  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  besitzt, d.h. je redundanter er ist, umso kleiner wird die mittlere Abweichung.  $\square$

## 2.3 Einige Fakten über Frames

- Ein Frame in einem endlichen dimensionalen Raum kann zwar unendlich viele Frameelement besitzen, aber sobald alle Frameelement nach unten beschränkt sind, kann der Frame nur endlich viele Elemente besitzen
- Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein Frame für  $\mathbb{C}^n$ . Dann sind die  $2m$  Vektoren, die aus Real- und Imaginärteil von  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  bestehen, ein Frame für  $\mathbb{R}^n$ .
- Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^m$  ein Frame für einen Vektorraum  $V$  und  $P$  die orthogonale Projektion von  $V$  auf einen Unterraum  $W$ . Dann ist  $\{P(\phi_k)\}_{k=1}^m$  ein Frame für  $W$ .
- Ein endlicher normalisierter, tight Frame hat eine Frameschranke  $A \geq 1$ , ist  $A = 1$  ist der Frame eine orthonormale Basis.

# Kapitel 3

## Unendlich dimensionale Räume

### 3.1 Das Setting

Im Folgenden nehmen wir immer an, dass wir uns in einem separablen Hilbertraum  $\mathcal{H}$  befinden, d.h.:

- Es existiert ein inneres Produkt.
- Der Raum ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge konvergiert.
- Es existiert eine abzählbar große, dichte Teilmenge, die  $\mathcal{H}$  aufspannt.
- Es existiert eine orthonormale Basis von  $\mathcal{H}$ .

### 3.2 Folgen, Reihen und Konvergenz

Wenn wir von endlich dimensionalen Räumen auf unendlich dimensionale Räume springen, sollten wir uns ein wenig über die Konvergenz von  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$  überlegen. Betrachten wir eine Folge  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  so definieren wir *Konvergenz* durch:

**Definition 3.2.1.** Eine Folge  $\phi_k$  konvergiert gegen  $f$  wenn

$$\|f - \phi_k\| \rightarrow 0, \text{ wenn } k \rightarrow \infty.$$

Eine Folge heißt *Cauchyfolge*, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, sodass

$$\|x_k - x_\ell\| \leq \varepsilon \text{ wenn } k, \ell \geq N.$$

Eine *Banachraum* ist ein Vektorraum mit Norm, in dem jede Cauchyfolge konvergiert. Betrachten wir Reihen, können wir im Prinzip fürs erste einmal drei Arten von Konvergenz betrachten: Eine Reihe  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  konvergiert gegen  $f$  wenn

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \right\| \rightarrow 0 \text{ wenn } k \rightarrow \infty.$$

In diesem Fall schreiben wir

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$$

In diesem Fall ist aber die Ordnung von  $\phi_k$  wichtig.

Im Fall, dass die Konvergenz nicht von der Reihenfolge der Summation abhängt, sprechen wir von *unbedingter* Konvergenz, gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|c_k \phi_k\| < \infty$$

sprechen wir von *absoluter* Konvergenz.

Eine Teilmenge  $W$  eines Vektorraums  $V$  heißt *dicht*, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  und jedes  $v \in V$  ein  $w \in W$  gibt, sodass

$$\|w - v\| \leq \varepsilon.$$

Wie schon im vorigen Kapitel ist  $\text{span}\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  die Menge aller *endlichen* Linearkombinationen von Vektoren  $\phi_k$ , gilt

$$V = \overline{\text{span}\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}}$$

so heißt  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  vollständig.

Betrachten wir Operatoren, d.h. Abbildungen zwischen zwei Vektorräumen, und haben wir eine Folge von beschränkten Operatoren  $U_n$ , die punktweise gegen einen Operator  $U$  konvergiert, so ist auch  $U$  beschränkt.

Für Hilberträume gilt auch, dass  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  genau dann vollständig ist, wenn gilt:

$$\langle f, \phi_k \rangle = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ dann gilt } f = 0.$$

Außerdem gilt in Hilberträumen, dass

$$\|f\| = \sup_{\|g\|=1} |\langle f, g \rangle|.$$

### 3.3 Basen

**Definition 3.3.1** (Basis). Sei  $\mathcal{H}$  ein unendlich dimensionaler Hilbertraum und  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine Folge von Vektoren in  $\mathcal{H}$ .

(i)  $\{e_j\}$  heißt (Schauder)basis von  $\mathcal{H}$ , wenn es für jedes Element  $f \in \mathcal{H}$  eindeutige Koeffizienten  $\{c_j(f)\}_{j=1}^{\infty}$  gibt, sodass

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(f) e_j.$$

(ii) Konvergiert die obige Summe unbedingt, so sprechen wir von einer unbedingten (unconditional) Basis.

(iii) Gilt darüber hinaus, dass

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k = j, \\ 0 & \text{wenn } k \neq j, \end{cases}$$

sprechen wir von einer orthonormalen Basis.

**Lemma 3.3.2.** Sei  $\{e_j\}_{j=1}^\infty$  ein orthonormales System und  $\{c_j\} \in \ell^2(\mathbb{N})$  eine Folge von Koeffizienten. Dann konvergiert  $\sum_{j=1}^\infty c_j e_j$ .

*Beweis.* Wir betrachten die Differenz zweier Teilsummen mit  $m < n$

$$\left\| \sum_{j=1}^n c_j e_j - \sum_{j=1}^m c_j e_j \right\|^2 = \left\| \sum_{j=m+1}^n c_j e_j \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^n |c_j|^2 \leq \varepsilon$$

weil  $\{c_j\} \in \ell^2(\mathbb{N})$  konvergiert und damit eine Cauchyfolge ist. Damit ist aber auch die Folge der Teilsummen  $\sum_{j=1}^n c_j e_j$  eine Cauchyfolge, und weil wir in einem vollständigen Raum sind, somit konvergent. Damit ist die Summe wohldefiniert.  $\square$

### 3.3.1 Besselfolgen

Wie für (endliche) Frames können wir nun auch Analyse- und Syntheseoperator definieren und es gilt:

**Lemma 3.3.3.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathcal{H}$  (nicht unbedingt notwendigerweise ein orthonormal Basis) für die gilt, dass  $\sum_{k=1}^\infty c_k \phi_k$  konvergent für alle  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N})$ . Dann ist

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H} : T\{c_k\}_{k=1}^\infty := \sum_{k=1}^\infty c_k \phi_k$$

eine beschränkter linearer Operator mit adjungierter

$$T^* : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2, T^*(f) = \{\langle f, \phi_k \rangle\}_{k=1}^\infty,$$

und es gilt

$$\sum_{k=1}^\infty |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq \|T\|^2 \|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}.$$

*Beweis.* Wir betrachten wieder die Folge der Teilsummen  $T_n$ , von der wir wissen, dass sie lt. Voraussetzung punktweise konvergiert, und nachdem sie beschränkte lineare Operatoren sind, gilt das auch für  $T$ .

Umgekehrt gilt für  $T^*$

$$\langle T^* f, \{c_k\} \rangle = \langle f, T\{c_k\}_{k=1}^\infty \rangle = \left\langle f, \sum_{k=1}^\infty c_k \phi_k \right\rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle f, \phi_k \rangle \overline{c_k},$$

weil das innere Produkt stetig ist. Nachdem  $T$  ein beschränkter Operator ist, gilt das auch für  $T^*$ , und nachdem wir in einem Hilbertraum sind, gilt der Darstellungssatz von Riesz, d.h. es gibt Elemente  $\{g_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{H}$ , sodass:

$$T^* f = \langle f, \{g_k\}_{k=1}^\infty \rangle.$$

Die Folge  $\{c_j\}$  wurde beliebig gewählt, und die Darstellung nach Riesz ist eindeutig, d.h.

$$\phi_k = g_k.$$

Der letzte Punkt des Satzes folgt aus

$$\sum_{k=1}^\infty |\langle f, \phi_k \rangle|^2 = \|T^* f\|^2 \leq \|T^*\|^2 \|f\|^2 = \|T\|^2 \|f\|^2.$$

$\square$

**Bemerkung:** Das bedeutet, dass eine Art obere Frameschranke erfüllt wird.

**Definition 3.3.4** (Besselfolge). *Eine Familie von Funktionen  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{H}$ , für die*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (3.1)$$

*gilt, heißt Besselfolge. Dadurch, dass es in der Summe Gl. (3.1) nur positive Summanden gibt, folgt auch, dass die Reihenfolge der  $\phi_k$  keine Rolle spielt.*

Umgekehrt gilt auch, dass wenn  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  eine Besselfolge ist,  $T$  ein beschränkter Operator ist:

**Theorem 3.3.5.** *Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathcal{H}$  und  $B > 0$ .  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ist genau dann eine Besselfolge mit oberer Schranke  $B$  wenn*

$$T : \{c_k\}_{k=1}^\infty \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$$

*ein beschränkter Operator von  $\ell^2 \rightarrow \mathcal{H}$  ist und  $\|T\|^2 \leq B$ .*

*Beweis.* Nehmen wir an, dass  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  eine Besselfolge mit Schranke  $B$  und  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N})$  sind. Als Erstes wollen wir einmal zeigen, dass  $\sum_{k=1}^\infty c_k \phi_k < \infty$  wohldefiniert ist, d.h. dass die Summe konvergiert. Dazu gehen wir wieder den Weg über die Teilsummen und zeigen, dass sie eine Cauchyfolge sind (o.b.d.A nehmen wir an, dass  $n > m$ ):

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \phi_k - \sum_{k=1}^m c_k \phi_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n c_k \phi_k \right\|.$$

In Hilberträumen gilt (siehe z.B. Lemma A.1.8):

$$\|f\| = \sup_{\|g\|=1} |\langle f, g \rangle|,$$

also haben wir

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=m+1}^n c_k \phi_k \right\| &= \sup_{\|g\|=1} \left| \left\langle \sum_{k=m+1}^n c_k \phi_k, g \right\rangle \right| \leq \sup_{\|g\|=1} \sum_{k=m+1}^n |c_k \langle \phi_k, g \rangle| \leq \\ &\leq \left( \sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \right)^{1/2} \sup_{\|g\|=1} \left( \sum_{k=m+1}^n |\langle \phi_k, g \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{B} \left( \sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sqrt{B} \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Folge eine Cauchyfolge und daher konvergent. Außerdem ergibt sich, dass der Syntheseoperator  $T$  beschränkt ist und  $\|T\| \leq \sqrt{B}$ .

Die umgekehrte Richtung wurde schon oben gezeigt.  $\square$

Wie wir bereits oben erwähnt haben, ist die Reihenfolge bei einer Besselfolge egal, damit ergibt sich aber:

**Korollar 3.3.6.** *Wenn  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  eine Besselfolge im Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , dann konvergiert*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$$

*unbedingt für all  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N})$ .*

### 3.3.2 Orthonormale Systeme

Kehren wir zurück zu Basen, im Speziellen orthonormale Basen, d.h. Basen für die

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

gilt.

**Theorem 3.3.7.** *Sei  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  ein orthonormales System. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i)  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  ist eine orthonormale Basis.
- (ii)  $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$
- (iii)  $\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, g \rangle, \quad \forall f, g \in \mathcal{H}.$
- (iv)  $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2.$
- (v)  $\overline{\text{span}}\{e_j\}_{j=1}^{\infty} = \mathcal{H}.$
- (vi) Wenn  $\langle f, e_k \rangle = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , dann ist  $f = 0$ .

*Beweis.* Wenn  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine orthonormale Basis ist, dann lässt sich jedes  $f \in \mathcal{H}$  durch  $f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$  darstellen. Damit ergibt sich aber

$$\langle f, e_\ell \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j, e_\ell \right\rangle = c_\ell.$$

Durch die Stetigkeit des inneren Produkts ergibt sich (iii) (und damit (iv) als Spezialfall) direkt aus (ii). Angenommen  $f$  wäre nicht im abgeschlossenen Span von  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ , dann wäre  $f \perp e_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , damit folgt aber aus (iv), dass  $\|f\| = 0$  und somit, dass  $f = 0$ . Mit einem ähnlichen Argument ergibt sich auch (vi) aus (v). Fehlt nur noch (vi)  $\rightarrow$  (i).

Nachdem wir ein orthonormales System voraussetzen, gilt für alle  $\{c_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$

$$\left\| \sum_{j=1}^n c_j e_j - \sum_{j=1}^m c_j e_j \right\|^2 = \left\| \sum_{j=m+1}^n c_j e_j \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^n |c_j|^2,$$

d.h. die Teilsummen ergeben wieder eine Cauchyfolge und konvergieren somit. Sei nun  $g := \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j$  und

$$\langle f - g, e_\ell \rangle = \langle f, e_\ell \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j, e_\ell \right\rangle = \langle f, e_\ell \rangle - \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle \delta_{j,\ell} = 0,$$

woraus aus (vi) folgt, dass  $f - g = 0$  bzw. dass  $f = g$ . Angenommen, es gäbe noch eine zweite Kombination für  $f = \sum_{j=1}^{\infty} c'_j e_j$ , dann folgt

$$c_\ell = \langle f, e_\ell \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} c'_j e_j, e_\ell \right\rangle = c'_\ell,$$

und somit die Eindeutigkeit der Darstellung. □

Damit folgt aber auch gleich:

**Korollar 3.3.8.** Sei  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine orthonormale Basis, dann hat jedes Element  $f \in \mathcal{H}$  eine eindeutige, unbedingt konvergierende Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j.$$

Außerdem gilt,

**Korollar 3.3.9.** Jeder separable Hilbertraum  $\mathcal{H}$  besitzt eine orthonormale Basis.

*Beweis.*  $\mathcal{H}$  ist separabel, d.h. es gibt eine Familie  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  mit  $\overline{\text{span}}\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} = \mathcal{H}$ , und wir können eine Unterfamilie betrachten, für die  $\phi_{n+1} \notin \overline{\text{span}}\{\phi_k\}_{k=1}^n$ , d.h. die  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  sind linear unabhängig. Benutzen wir nun die Gram-Schmidt Orthogonalisierung können wir daraus eine orthonormales System  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  generieren.  $\square$

Nachdem jeder separable Hilbertraum eine orthonormale Basis besitzt, ist es auch möglich, jedes Element aus dem Raum mit seinen Koeffizienten zu identifizieren. Wenn der Basis  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  die kanonische Basis  $\{\delta_j\}_{j=1}^{\infty}$  für  $\ell^2(\mathbb{N})$  zugeordnet wird, ergibt sich

$$Uf = U \left( \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle \delta_j.$$

Daraus folgt, dass jeder separable unendlich dimensionale Hilbertraum isometrisch isomorph zu  $\ell^2(\mathbb{N})$  ist.

Mit der gleichen Idee lässt sich auch leicht ein Zusammenhang zwischen allen orthonormalen Basen eines Hilbertraums herstellen:

**Theorem 3.3.10.** Alle orthonormalen Basen eines separablen Hilbertraums lassen sich als Bilder einer beliebigen orthonormalen Basis  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  mit einer unitären Abbildung konstruieren

*Beweis.* Seien  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  und  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  zwei orthogonale Basen für  $\mathcal{H}$ . Wie schon oben, definieren wir die Abbildung

$$U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, U \left( \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j, \{c_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Betrachten wir nun

$$\begin{aligned} \langle U^*Uf, g \rangle &= \langle Uf, Ug \rangle = \left\langle U \left( \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j \right), U \left( \sum_{j=1}^{\infty} \langle g, e_j \rangle e_j \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle \phi_j, \sum_{j=1}^{\infty} \langle g, e_j \rangle \phi_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle \overline{\langle g, e_j \rangle} = \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

Damit ist aber  $U^*U = I$ , weil

$$\langle (U^*U - I)f, g \rangle = 0, \forall g \rightarrow U^*U - I = 0.$$

Ist nun  $U$  andererseits ein unitärer Operator, so gilt

$$\langle Ue_k, Ue_j \rangle = \langle U^*Ue_k, e_j \rangle = \delta_{k,j}$$

und  $\{Ue_j\}_{j=1}^{\infty}$  ist ein orthonormales System mit  $\overline{\text{span}}\{Ue_j\}_{j=1}^{\infty} = \overline{\text{span}}\{e_j\}_{j=1}^{\infty} = \mathcal{H}$ .  $\square$

### 3.3.3 Riesz Basen

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir gesehen, wie verschiedenen orthonormale Basen in einem Hilbertraum über eine unitäre Abbildung zusammenhängen. Eine Verallgemeinerung dazu sind Riesz Basen, die sich mit Hilfe einer beschränkten und bijektiven Abbildung definieren lassen:

**Definition 3.3.11.** Sei  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine orthonormale Basis für den Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  eine beschränkte lineare und bijektive Abbildung. Dann wird  $\{Ue_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine Riesz Basis genannt.

Wie bei orthonormalen Basen gibt kann jedes Element des Hilbertraums eindeutig durch eine Riesz Basis dargestellt werden:

**Theorem 3.3.12.** Sei  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine Riesz Basis in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Dann existiert ein eindeutige Familie  $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$  in  $\mathcal{H}$ , und es gilt:

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j, \forall f \in \mathcal{H}.$$

Die Familie  $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$  ist ebenfalls eine Riesz Basis, und die obige Summe konvergiert unbedingt.

*Beweis.* Durch die Definition einer Riesz Basis als Bild einer orthonormal Basis  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ , gilt  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty} = \{Ue_j\}_{j=1}^{\infty}$ , wobei  $U$  ein beschränkter und bijektiver Operator ist. Sei nun  $f \in \mathcal{H}$ . Dann gilt

$$U^{-1}f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle U^{-1}f, e_j \rangle e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, (U^{-1})^* e_j \rangle e_j.$$

Setzen wir nun  $\psi_k := (U^{-1})^* e_k$  ergibt sich

$$f = UU^{-1}f = U \sum_{j=1}^{\infty} \langle U^{-1}f, e_j \rangle e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, (U^{-1})^* e_j \rangle U(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j.$$

Dass  $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine Riesz Basis ist folgt aus der Tatsache, dass mit beschränktem bijektiven  $U$  auch  $(U^{-1})^*$  beschränkt und bijektiv ist.

Sei  $f \in \mathcal{H}$ , dann gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, Ue_j \rangle|^2 = |\langle U^* f, e_j \rangle|^2 = \|U^* f\|^2 \leq \|U\|^2 \|f\|^2.$$

Damit bilden die  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine Besselfolge, und die unbedingte Konvergenz der Summe wurde schon oben gezeigt.

Eine Frage, die noch gar nicht gestellt wurde, ist "Ist eine Riesz Basis überhaupt eine Basis?". Dass zumindest jedes Element  $f \in \mathcal{H}$  durch Elemente aus  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  dargestellt werden kann, wurde zumindest schon gezeigt. Aber ist diese Darstellung auch eindeutig? Betrachten wir also

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(f) \phi_j = \sum_{j=1}^{\infty} d_j(f) \phi_j.$$

Wenn wir nun  $U^{-1}$  auf beide Seiten oben anwenden, sind wir auf der Ebene der  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ , die per Definition eine Basis bilden, und damit müssen die die Koeffizienten gleich sein. Das gleiche gilt auch für das duale System  $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ . Angenommen es gäbe ein zweites System  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$  mit

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \varphi_j \rangle \phi_j,$$

dann folgt mit der gleichen Argumentation wie oben, dass

$$\langle f, \psi_k \rangle = \langle f, \varphi_k \rangle, \forall f \in \mathcal{H},$$

und wegen des Rieszischen Darstellungssatzes folgt Gleichheit von  $\psi_k$  und  $\varphi_k$ .  $\square$

**Definition 3.3.13** (Duale Riesz Basis). *Die eindeutig bestimmte Folge  $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ , für die*

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j, \forall f \in \mathcal{H}$$

*gilt, heißt duale Riesz Basis.*

Es lässt sich auch leicht zeigen, dass wenn  $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$  die duale Basis von  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  ist, umgekehrt auch  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  dual zu  $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$  ist.  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  und  $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$  sind zueinander *biorthogonal*, und es gilt

$$\langle \phi_j, \psi_k \rangle = \langle Ue_j, (U^{-1})^* e_k \rangle = \langle e_j, e_k \rangle.$$

**Theorem 3.3.14.** *Sei  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine Riesz Basis. Dann existieren zwei Konstanten  $A, B > 0$  mit*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}.$$

*Die größte untere Schranke ist durch  $A = \frac{1}{\|U^{-1}\|^2}$ , die kleinste obere Schranke durch  $B = \|U\|$  gegeben.*

*Beweis.* Die obere Schranke lässt sich wie bereits oben beschrieben leicht herleiten:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, Ue_k \rangle|^2 = \|U^* f\|^2 \leq \\ &\leq \|U^*\|^2 \|f\|^2 = \|U\|^2 \|f\|^2. \end{aligned}$$

Für die untere Schranke nutzen wir, dass

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \|(U^*)^{-1} U^* f\|^2 \leq \|(U^*)^{-1}\|^2 \|U^* f\|^2 = \|U^{-1}\|^2 \|U^* f\|^2 = \\ &= \|U^{-1}\|^2 \sum_{j=1}^{\infty} |\langle U^* f, e_j \rangle|^2 = \|U^{-1}\|^2 \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, Ue_j \rangle|^2 \end{aligned}$$

$\square$

Eine alternative Definition für Riesz-Basen ergibt sich aus folgendem Satz

**Theorem 3.3.15.** *Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Familie von Funktionen in  $\mathcal{H}$ . Dann sind folgender Aussagen äquivalent:*

- (i)  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ist eine Riesz Basis für  $\mathcal{H}$ .
- (ii)  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ist vollständig, und es existieren Konstante  $A, B > 0$ , sodass für jede endliche Folge  $\{c_k\}_{k=1}^\infty$  gilt:

$$A \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k \right\|^2 \leq B \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2. \quad (3.2)$$

*Beweis.* Nehmen wir einmal an, dass  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  eine Riesz Basis für  $\mathcal{H}$  ist, d.h.  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ist das Bild einer Orthonormalbasis  $\phi_k = U e_k$  ist, wobei  $U$  beschränkt und bijektiv ist. Nachdem sich jedes  $f \in \mathcal{H}$  durch Basis und dualer Basis darstellen lässt, ist  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  vollständig.

Sei  $\{c_k\}_{k=1}^\infty$  eine endliche Folge, dann gilt

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k \right\|^2 = \left\| U \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right) \right\|^2 \leq \|U\|^2 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right\|^2 = \|U\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Außerdem gilt

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right\|^2 = \left\| U^{-1} U \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right) \right\|^2 \leq \|U^{-1}\|^2 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k \right\|^2.$$

Damit ergibt sich aber Gleichung (3.2).

Betrachten wir nun die andere Richtung. Die rechte Ungleichung in Gl. (3.2) impliziert, dass  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  eine Besselfolge mit Schranke  $B$  ist. Das lässt sich am einfachsten mit Theorem 3.3.5 zeigen.

Nachdem wir in einem Hilbertraum sind, existiert eine orthonormale Basis  $\{e_j\}_{j=1}^\infty$  für  $\mathcal{H}$ , und wir definieren die Abbildung  $U : \text{span}\{e_k\} \rightarrow \text{span}\{\phi_k\}$  mittels

$$V \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k,$$

wobei  $\{c_k\}_{k=1}^\infty$  endliche Folgen sind. Für eine endliche Folge gilt auch

$$\left\| U \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k \right\|^2 = B \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{B}{A} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k \right|^2.$$

Das bedeutet das  $U$  ein beschränkter, wohldefinierter, linearer Operator ist. Weil  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  eine Basis ist, kann  $U$  auf ganz  $\mathcal{H}$  ausgeweitet werden, und wir haben einen beschränkten Operator auf  $\mathcal{H}$ . In ähnlicher Weise ist  $V \phi_k := e_k$  ein beschränkter Operator, und  $VU = UV = I$ , also ist  $U$  invertierbar. Daraus folgt, dass  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  eine Riesz Basis ist.  $\square$

Im obigen Satz wurde Vollständigkeit vorausgesetzt. Ist dies nicht der Fall, können wir nicht von einer Basis sprechen, sondern nur von einer Folge:

**Definition 3.3.16** (Rieszfolge). *Eine Familie  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ , die Gl. (3.2) erfüllt, heißt Rieszfolge.*

**Bemerkung:** In der Literatur finden man ab und an auch die Definition von Rieszfolgen, das Bedingung Gl. (3.2) für alle Folgen  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \ell(\mathbb{N})^2$  erfüllte werden muss. Es lässt sich aber zeigen, dass wenn der Bedingung für endliche Folgen erfüllt ist, sie auch für allgemeine Folgen  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N})$  erfüllt ist.

### 3.3.4 Die Gram Matrix

Wie schon im endlich dimensionalen Fall, gibt es für Basen auch eine Möglichkeit der Darstellung mittels (unendlich großer) Matrizen. Betrachten wir für eine Besselfolge bzw. eine Basis  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  die Kombination aus dem Operator

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}, \quad T\{c_j\}_{j=1}^{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j$$

und dessen adjungiertem Operator  $T^*$ , so erhalten wir einen beschränkten Operator von  $\ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$

$$T^*T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}), \quad T^*T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j, \phi_k \right\rangle \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Wenn wir mit der kanonischen Basis  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  vom Raum  $\ell^2(\mathbb{N})$  arbeiten, können wir eine Matrixrepräsentation  $\mathbf{G}$  für  $T^*T$  finden, wobei der  $ij$ -te Eintrag von  $\mathbf{G}$  durch

$$\mathbf{G}_{ij} = \langle T^*T e_i, e_j \rangle = \langle T e_i, T e_j \rangle = \langle \phi_i, \phi_j \rangle \quad (3.3)$$

gegeben ist.

**Definition 3.3.17** (Gram Matrix). *Die Matrix  $\mathbf{G}$  mit Einträgen definiert in Gl. (3.3) wird Gram Matrix genannt*

Dadurch, dass wir vorausgesetzt haben, dass  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  zumindest eine Besselfolge ist, ist die Beschränktheit von  $T^*T$  gegeben. Umgekehrt gilt aber auch:

**Lemma 3.3.18.** *Ist die Gram Matrix  $\mathbf{G}$  für eine Folge  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  ein beschränkter Operator auf  $\ell^2(\mathbb{N})$  mit Norm  $B$ , so ist  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine Besselfolge mit Schranke  $B$ .*

*Beweis.* Seien  $\mathbf{c} := \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$  und  $\mathbf{G}$  ein beschränkter Operator auf  $\ell^2(\mathbb{N})$  mit Schranke  $B$ . Dann gilt

$$\|\mathbf{G}\mathbf{c}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{G}_{ij} c_j \right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \langle \phi_i, \phi_j \rangle c_j \right|^2 \leq B^2 \|\mathbf{c}\|^2.$$

Nachdem wir uns in einem Hilbertraum befinden, können wir Konvergenz einer Reihe über das Cauchy Kriterium zeigen, d.h. wir betrachten die Differenz von  $n$ -ter und  $m$ -ter Teilsumme, wobei wir o.B.d.A annehmen, dass  $n > m$ :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=m+1}^n c_j \phi_j \right\|^4 &= \left| \left\langle \sum_{i=m+1}^n c_i \phi_i, \sum_{j=m+1}^n c_j \phi_j \right\rangle \right|^2 = \left| \sum_{j=m+1}^n \bar{c}_j \sum_{i=m+1}^n c_i \langle \phi_i, \phi_j \rangle \right|^2 = \\ &= \left| \left\langle \sum_{i=m+1}^n \langle c_i \phi_i, \{\phi_j\}_{j=m+1}^n \rangle, \{c_j\}_{j=m+1}^n \right\rangle \right|^2 \leq \\ &\leq \|\{c_j\}_{j=m+1}^n\|^2 \left( \sum_{j=m+1}^n \left| \sum_{i=m+1}^n c_i \langle \phi_i, \phi_j \rangle \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Nachdem  $\mathbf{G}$  ein beschränkter Operator ist, gilt

$$\sum_{i=m+1}^n \left| \sum_{j=m+1}^n c_j \langle \phi_j, \phi_i \rangle \right|^2 \leq B^2 \sum_{j=m+1}^n |c_j|^2.$$

Das heißt,  $\sum_{j=1}^{\infty}$  ist eine Cauchyfolge und damit konvergent, und wie schon oben, ergibt sich

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j \right\| \leq \sqrt{B} \|\mathbf{c}\|,$$

und mit Theorem 3.3.5 folgt, dass  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine Besselfolge ist.  $\square$

Damit lässt sich eine einfache Verbindung zwischen Gram Matrix und Besselfolge herstellen. Wenn wir nun die Definitionen von Gram Matrix und Besselfolgen betrachten, fällt auf, dass wir für die Gram Matrix nur das innere Produkt der Elemente von  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  brauchen, während wir für eine Besselfolge eigentlich immer die Produkte  $\langle f, \phi_k \rangle$  für alle  $f \in \mathcal{H}$  betrachten müssen. Das heißt, dass im Prinzip ein einfacheres Kriterium zu Verfügung steht, um den Nachweis einer Besselfolge zu erbringen, falls auch die Umkehrung des Satzes gelten würde.

Dazu brauchen wir zunächst einmal folgendes Lemma:

**Lemma 3.3.19.** *Sei  $\mathbf{M} = \{M_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$  eine (unendlich dimensionale) Matrix für die gilt, dass  $M_{ij} = \overline{M_{ji}}, \forall i, j \in \mathbb{N}$  ist, und es gilt*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |M_{ij}| \leq B, \forall i \in \mathbb{N}.$$

*Dann definiert  $\mathbf{M}$  einen beschränkten linearen Operator auf  $\ell^2(\mathbb{N})$  dessen Norm höchstens  $B$  ist.*

*Beweis.* Sei  $\mathbf{c} \in \ell^2(\mathbb{N})$ . Durch die Voraussetzung des Lemmas wissen wir zumindest, dass die  $i$ -te Komponente  $\sum_{j \in \mathbb{N}} M_{ij} c_j$  von  $\mathbf{M}\mathbf{c}$  wohldefiniert ist. Das können wir wieder zeigen, in dem wir die Folge der Teilsummen betrachten:

$$\left| \sum_{j=m+1}^n M_{ij} c_j \right| \leq \sum_{j=m+1}^n |M_{ij} c_j| \leq \epsilon, \quad m, n > N(\epsilon).$$

Um zu zeigen, dass  $\mathbf{M}\mathbf{c} \in \ell^2(\mathbb{N})$  benutzen wir, dass die Abbildung

$$\mathcal{O}(\mathbf{d}) := \langle \mathbf{d}, \mathbf{M}\mathbf{c} \rangle$$

ein beschränktes lineares Funktional ist:

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{d}, \mathbf{M}\mathbf{c} \rangle| &= \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \overline{\sum_{j \in \mathbb{N}} M_{ij} c_j} d_i \right| \leq \sum_{i,j \in \mathbb{N}} |M_{ij} c_j d_i| = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} |M_{ij}|^{1/2} |c_j| |M_{ij}|^{1/2} |d_i| \leq \\ &\leq \left( \sum_{i,j \in \mathbb{N}} |M_{ij}| |c_j|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i,j \in \mathbb{N}} |M_{ij}| |d_i|^2 \right)^{1/2} \leq B \|\mathbf{c}\| \|\mathbf{d}\|, \end{aligned}$$

weil

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |M_{ij}| |c_j|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} |M_{ij}| |c_j|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} B |c_j|^2.$$

Daraus ergibt sich auch (z.B. mit dem Riesz'schen Darstellungssatz), dass  $\mathbf{M}\mathbf{c} \in \ell^2(\mathbb{N})$  und dass

$$\|\mathbf{M}\mathbf{c}\| = \sup_{\|\mathbf{d}\|=1} |\langle \mathbf{d}, \mathbf{M}\mathbf{c} \rangle| \leq B \|\mathbf{c}\|.$$

□

Es ergibt sich somit ein einfaches *hinreichendes* Kriterium, um zu zeigen, dass  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine Besselfolge ist:

**Theorem 3.3.20.** *Sei  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine Folge in  $\mathcal{H}$  und sei  $B > 0$  eine Konstante, sodass*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle \phi_i, \phi_j \rangle| \leq B, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

*gilt, dann ist  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine Besselfolge mit Schranke  $B$ .*

Basierend auf dem Zusammenhang zwischen Gram Matrix und einer Besselfolge, lässt sich auch ein ähnlicher Zusammenhang für Riesz Basen zeigen:

**Theorem 3.3.21.** *Sei  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  ein Folge in  $\mathcal{H}$ , dann sind folgender Aussagen äquivalent:*

- (i)  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  ist eine Riesz Basis für  $\mathcal{H}$ .
- (ii)  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  ist vollständig, und die Gram Matrix mit Einträgen  $\mathbf{G}_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$  definiert eine beschränkten, invertierbaren Operator auf  $\ell^2(\mathbb{N})$ .
- (iii)  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  ist eine vollständige Besselfolge, und es existiert eine vollständige biorthogonale Folge  $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ , die ebenfalls eine Besselfolge ist.

*Beweis.* (i)  $\rightarrow$  (ii): Wenn wir annehmen, dass  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine Riesz Basis ist, existiert ein beschränkter, invertierbarer Operator  $U$  mit  $\phi_j = Ue_j$  wobei  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine orthonormale Basis von  $\mathcal{H}$  ist. Dann gilt

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \langle Ue_i, Ue_j \rangle = \langle U^*Ue_i, e_j \rangle.$$

Das bedeutet, dass  $\mathbf{G}$  mit der Darstellung von  $U^*U$  in der Basis identifiziert werden kann, und nachdem  $U^*U$  beschränkt und invertierbar ist, gilt das auch für  $\mathbf{G}$ .

(ii)  $\rightarrow$  (i) Umgekehrt gilt nach den obigen Lemmata, dass  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine Besselfolge ist, d.h.

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j \right\|^2 \leq B \|\mathbf{c}\|^2,$$

womit der zweite Teil für die alternative Riesz Basis Definition erfüllt ist.

Für die untere Schranke betrachten wir

$$\langle \mathbf{G}\mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \langle \phi_i, \phi_j \rangle c_i \bar{c}_j = \left\| \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j \phi_j \right\|^2 \geq 0.$$

D.h.  $\mathbf{G}$  ist positive, selbst adjungierter (per Definition über  $T^*T$ ) und invertierbar (Voraussetzung in Punkt (ii)). Somit existiert die positive, invertierbare Wurzel  $\mathbf{V}$  von  $\mathbf{G}$  und es gilt

$$\|\mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{c}\|^2 \leq \|\mathbf{V}^{-1}\|^2 \|\mathbf{V}\mathbf{c}\|^2$$

bzw.

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j \right\|^2 = \|\langle \mathbf{G}\mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle\|^2 = \|\langle \mathbf{V}\mathbf{V}\mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle\|^2 = \|\mathbf{V}\mathbf{c}\|^2 \geq \frac{1}{\|\mathbf{V}^{-1}\|^2} \|\mathbf{c}\|^2,$$

d.h. obere und untere Schranke für die Riesz Basen Bedingung existieren und sind größer 0.

(i)  $\rightarrow$  (iii): Per Definition ergibt sich, dass eine Riesz Basis vollständig ist. Mit Hilfe von Theorem 3.3.12 wissen wir, dass es eine biorthogonale duale Basis gibt, und lt Theorem 3.3.14 sind beide Besselfolgen.

(iii)  $\rightarrow$  (i): Dieser Teil ist ein wenig technisch, wir beschränken uns erst einmal auf endliche Summen, d.h. wir nehmen an, dass  $f \in \text{span}\{\phi_j\}$  ist. Die Darstellung von  $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$  als Linearkombination der  $\phi_k$  ist eindeutig, weil durch die Biorthogonalität gilt, dass

$$\langle f, \psi_i \rangle = \left\langle \sum c_j \phi_j, \psi_i \right\rangle = \sum c_j \langle \phi_j, \psi_i \rangle = c_i.$$

- Wir identifizieren  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  wieder mit der orthonormal Basis von  $\mathcal{H}$ , d.h. wir definieren eine Abbildung

$$V : \text{span}\{\phi_j\} \rightarrow \mathcal{H}, V(f) = V\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j.$$

- $V$  ist beschränkt, weil

$$\|Vf\|^2 = \|V \sum \langle f, \psi_j \rangle \phi_j\|^2 = \|V \sum \langle f, \psi_j \rangle e_j\|^2 = \sum |\langle f, \psi_j \rangle|^2 \leq C \|f\|^2$$

und  $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$  eine Besselfolge ist.

- Die Voraussetzungen in (iii) für  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  und  $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$  sind vertauschbar, also gibt analog zur Abbildung  $V$  eine Abbildung  $W$  für  $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ .

- Mit Hilfe von  $W$  können wir zeigen, dass  $V$  injektiv ist. Das ergibt sich aus

$$\langle Vf, Wg \rangle = \left\langle \sum c_j e_j, \sum d_j e_j \right\rangle = \sum c_j \bar{d}_j = \langle f, g \rangle$$

Angenommen, es gibt jetzt ein  $h \in \mathcal{H}$  mit  $Vh = 0$ , dann gilt aber mit

$$\|h\|^2 = |\langle h, h \rangle| = |\langle Vh, Wh \rangle| \leq \|Vh\| \|Wh\| \|h\|$$

dass auch  $\|h\| = 0$  sein muss.

- $V$  ist aber auch surjektiv, denn jedes  $f \in \mathcal{H}$  lässt sich als  $\sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j = V(\langle f, e_j \rangle \phi_j)$  schreiben

- Jetzt ohne Beweis: Durch Stetigkeit und Vollständigkeit der Besselfolgen lassen sich  $V$  und  $W$  auch auf Operatoren von  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  erweitern, und die Eigenschaften bleiben erhalten.

7.  $V$  ist also invertierbar und nachdem  $\phi_k = V^{-1}e_k$  ist, ist  $\phi_k$  als Bild eines invertierbaren, beschränkten Operators eine Riesz Basis.

□

Die Verbindung zwischen Gram Matrix und Riesz Basis lässt auch Rückschlüsse über die Riesz Basis Schranken  $A$  und  $B$  zu. Zur Erinnerung, eine Folgerung von Riesz Basen ist ja, dass es zwei Konstanten  $A, B > 0$  gibt, für die

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Es gilt  $A = \frac{1}{\|\mathbf{G}^{-1}\|}$  und  $B = \|\mathbf{G}\|$ .

### 3.3.5 Beispiele für Riesz Basen

#### Beispiel 1: Fourierreihen

In der Akustik spielt die Fouriertransformation vor allem in der Analyse von Signalen eine wichtige Rolle, weil mit ihr der Frequenzinhalt eines Signals bestimmt werden kann, siehe Abbildung 3.1. Eingeführt wurde sie eigentlich abseits der Akustik, als Joseph Fourier die Wärmeleitungsgleichung am Kreis lösen wollte. Die Eigenschaft der Fouriertransformation Ableitungen in Multiplikationen umwandeln zu können, macht sie auch als Werkzeug zum Lösen (partieller) Differentialgleichungen interessant.

Die Grundidee hinter der Transformation ist die Darstellung (periodische) Funktionen durch eine Linearkombination aus Sinus und Kosinusfunktionen (bzw. komplexer Exponentialfunktionen).

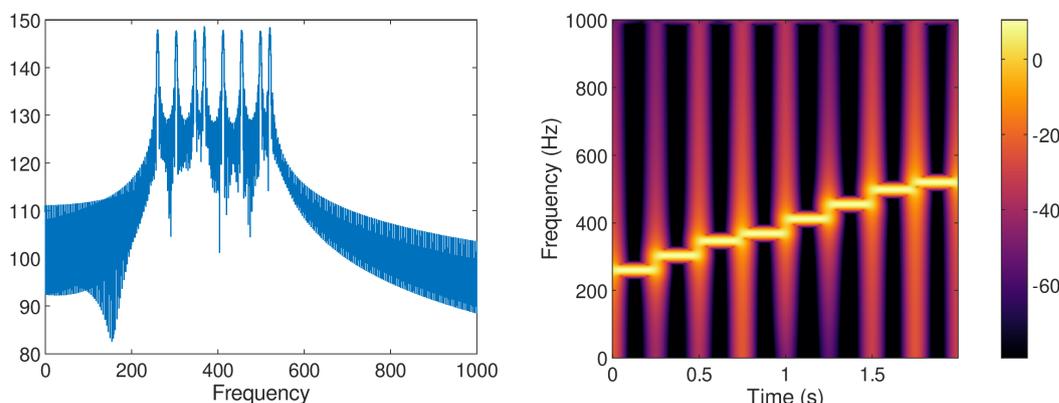


Abbildung 3.1: Spektrum und Spektrogramm der C-Dur Tonleiter.

**Definition 3.3.22** (Periodische Funktionen). *Eine Funktion  $f(t)$  ist periodisch mit Periodenlänge  $T$ , wenn gilt:*

$$f(t + T) = f(t).$$

**Definition 3.3.23** (Fourierreihe). *Sei  $f(t)$  eine periodische Funktion mit Periodenlänge  $T$ . Die Fourierreihe für  $f(t)$  ist formal als*

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right),$$

definiert, bzw. in kompakterer komplexer Notation

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{2\pi i k \frac{t}{T}}.$$

Die Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$  ergeben sich durch

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i k \frac{t}{T}} dt. \quad (3.4)$$

**Bemerkung:** Fürs Erste wollen wir einmal die Definition nehmen wie sie ist, und uns noch keine Gedanken über die Konvergenz der Summe machen.

**Definition 3.3.24.** Eine Linearkombination  $p(t) = \sum_{n=-N}^N p_n e^{2\pi i k t/T}$  wird als trigonometrisches Polynom bezeichnet.

**Theorem 3.3.25.** Die Funktionen  $e^{2\pi i k t/T}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  bilden bezüglich des inneren Produkts

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt$$

ein Orthonormalsystem, wobei  $\bar{g}(t)$  die konjugiert komplexe Funktion zu  $g(t)$  bezeichnet.

*Beweis.* Einfach nachrechnen. □

**Bemerkung:** Bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten sind die Grenzen des Integrals übrigens egal, es muss nur über eine volle Periode integriert werden. Oft wird zum Beispiel auch von  $[-T/2, T/2]$  integriert.

**Bemerkung:** Die Bedingungen an  $f(t)$ , damit die Fourierkoeffizienten existieren, sind Integrierbarkeit und Beschränktheit der Funktion. Ganz formal reicht:  $f(t) \in L^1([0, T])$ , was auf endlichen Intervallen aus  $f(t) \in L^2([0, T])$  folgt.

**Bemerkung:** Die Fouriertransformation weist einer Funktion aus  $L^2([0, T])$  eine Folge  $c_k \in \ell^2(\mathbb{Z})$  zu.

**Bemerkung:** In der Literatur gibt es für die Fourierkoeffizienten gibt es verschiedene Bezeichnungen, z.B.  $\hat{f}_k$ ,  $\hat{f}[k]$ ,  $\mathcal{F}(f)(k)$ ,  $F$ , ...

Im Prinzip kann also jede Fourierreihe mit dem Raum  $L^2([0, T])$  in Verbindung gebracht werden, und die Funktionen

$$e_k(t) := \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i k t/T}$$

bilden eine orthonormal Basis für  $L^2([0, T])$ , d.h. jede Funktion  $f \in L^2([0, T])$  kann durch

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, e_k \rangle e_k$$

dargestellt werden. Um die punktweise Konvergenz der allgemeinen Folge

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k e^{2\pi i k t/T}$$

sicherzustellen zu können, ist es hinreichend, dass  $f$  stetig ist, und dass die  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{Z})$  ist.

**Beispiel: Einschränkung auf  $I \subset [0, 1]$** 

Die Familie  $\{e^{2\pi ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  bildet also eine orthonormale Basis von  $L^2([0, 1])$ . Aber wie sieht es mit  $L^2(I)$  mit  $I \subset [0, 1]$  aus? Jedes  $f \in L^2([0, 1])$  hat eine Darstellung

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, e_k \rangle e_k,$$

die auch in  $L^2(I)$  gilt, weil

$$\|f - \sum_{|k| \leq n} \langle f, e_k \rangle e_k\|_{L^2(I)} \leq \|f - \sum_{|k| \leq n} \langle f, e_k \rangle e_k\|_{L^2([0,1])} \rightarrow 0.$$

Das bedeutet,  $\{e^{2\pi ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  ist immer noch ein erzeugendes System für  $L^2(I)$ . Aber ist die Familie auch noch eine Basis?

Definieren wir zum Beispiel

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{if } t \in I, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In  $L^2([0, 1])$  müssen  $f$  und  $\tilde{f}$  unterschiedliche Koeffizienten in der Darstellung haben, weil dort bilden die  $\{e^{2\pi ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  ja eine Basis. Damit habe sie aber auch in  $L^2(I)$  nicht die gleichen Koeffizienten in der Darstellung, obwohl sie dort die gleiche Funktion beschreiben. Damit ist die Einschränkung der Basis auf  $L^2([0, 1])$  auf das Intervall  $I$  zwar ein Erzeugendensystem, aber keine Basis mehr.

**Beispiel 2: Gaborbasen**

Betrachten wir nun der Einfachheit halber den Raum  $L^2([0, 1])$ , dann bilden die Funktionen

$$\{e^{2\pi ikt} \chi_{[0,1]}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

eine Orthonormalbasis für diesen Raum, wobei  $\chi_{[0,1]}$  die charakteristische Funktion vom Intervall  $[0, 1]$  ist. Die verschobenen Funktionen

$$\{e^{2\pi ikt} \chi_{[0,1]}(t - n)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

bilden dann eine Basis von  $L^2([k, k + 1])$  und die Kombination aller Shifts

$$\{e^{2\pi ikt} \chi_{[0,1]}(t - n)\}_{k, n \in \mathbb{Z}} \tag{3.5}$$

eine Basis für  $L^2(\mathbb{R})$ . Im Prinzip besteht diese Basis aus einem Fenster  $g = \chi_{[0,1]}$ , das verschoben und moduliert wird, d.h. mit einer komplexen Exponentialfunktion multipliziert wird:

$$\{\mathcal{E}_k \mathcal{T}_n g\}_{k, n \in \mathbb{Z}},$$

Basen, die diese Form besitzen, werden *Gabor* Basen genannt.

### Gibt es gute Fenster?

Im vorigen Abschnitt wurden Gabor-Basen durch Translation und Modulation eines Fensters  $g$  generiert. Als Beispiel wurde die Funktion  $g = \chi_{[0,1]}$  verwendet, die zwar im Zeitbereich einen beschränkten Träger hat, aber im Frequenzbereich

$$\mathcal{F}(g) = e^{-i\pi s} \text{sinc}(s)$$

nur sehr langsam abfällt. Es kann generell gezeigt werden, dass eine Gabor Basis in  $\mathbb{R}$  nicht gleichzeitig im Zeit- und im Frequenzbereich einen beschränkten Träger besitzt

**Theorem 3.3.26** (Balian-Low). *Sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\{\mathcal{E}_m \mathcal{T}_n g\}$  eine Riesz Basis für  $L^2(\mathbb{R})$ . Dann gilt*

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} |tg(t)|^2 dt \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} |s\mathcal{F}(g)(s)|^2 ds \right) = \infty.$$

Wenn also ein schneller Abfall des Fenster sowohl in der Zeit als auch im Ort gewünscht wird, ist es nicht möglich Basen zu verwenden.

### Beispiel 3: Waveletbasen

Während Gaborbasen durch Translation und Modulation konstruiert werden können, werden Waveletbasen durch Translation und Dilatation, d.h. Strecken oder Stauchen, einer Funktion definiert, z.B:

$$\psi_{j,k}(t) = \mathcal{D}^j \mathcal{T}_k \psi = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), t \in \mathbb{R},$$

wobei  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ . Ein einfaches Beispiel für  $\psi$  ist die Haar Funktion

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{if } \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Haar-Funktion bilden die Funktionen  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  eine orthonormale Basis für  $L^2(\mathbb{R})$ .

### Multiresolution Analysis (MRA)

Mallat und Meyer führten Mehrskalenganalyse (multiresolution analysis) als ein Werkzeug zur Konstruktion von orthonormalen Basen für  $L^2(\mathbb{R})$  ein, die die Form  $\{\mathcal{D}_j \mathcal{T}_k \psi\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  besitzen, wobei  $\mathcal{D}_j$  und  $\mathcal{T}_k$  der Dilationsoperator, bzw. der Translationsoperator sind. Im Sinne der Definition von Gaborframes bestimmt  $\mathcal{D}_j$  die Länge des Fensters und  $\mathcal{T}_k$  verschiebt es an die richtige Stelle. In der Regel werden für diese Art Basis diskrete Wavelets mit  $a_0 = 2$  und  $b_0 = 1$  verwendet, d.h.

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m} t - n).$$

**Definition 3.3.27** (Multiresolution Analysis). *Eine Mehrskalenganalyse für  $L^2(\mathbb{R})$  besteht aus einer Folge von abgeschlossenen Unterräumen  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  und einer Funktion  $\phi \in V_0$ , sodass:*

1.  $\cdots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \cdots,$

2.  $\cap_j V_j = \{0\}$  und  $\overline{\cup_j V_j} = L^2(\mathbb{R})$ ,
3.  $\phi \in V_j \leftrightarrow \mathcal{D}_1 \phi \in V_{j+1}$ , bzw.  $\phi(a_0^j t) \in V_0$ ,
4.  $\phi \in V_0 \rightarrow \mathcal{T}_k \phi = \phi(t - k) \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}$ ,
5.  $\mathcal{T}_k \phi_{k \in \mathbb{Z}}$  ist eine orthonormale Basis für  $V_0$ .

**Beispiel 3.3.28.** Als einfaches Beispiel dient die charakteristische Funktion  $\chi_{[0,1]}$  des Intervall  $[0, 1]$  (also die Rechteckfunktion), deren Translationen  $\phi_k = \mathcal{T}_k \phi = \mathcal{T}_k \chi_{[0,1]}$  den Funktionenraum  $V_0 = \overline{\text{span}}\{\phi_k\}$  aufspannen. Zugegebener Maßen ein nicht unbedingt großer Raum, aber immerhin: Punkt 5, passt. Um die Auflösung/Genauigkeit der Darstellung eine Funktion ein wenig zu erhöhen, betrachten wir

$$V_1 = \overline{\text{span}} \left\{ \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(t + k/2), k \in \mathbb{Z}, \right\}$$

und in weiterer Folge

$$V_j = \overline{\text{span}} \{ \phi_{2^j, k} \} = \overline{\text{span}} \left\{ \chi_{[0, \frac{1}{2^j}]}(t + k/2^j), k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Punkte 1 bis 4, passt. Das heißt, jede Funktion wird mittels Rechteckfunktionen approximiert, die immer feiner werden, kennen wir im Prinzip von Riemannsummen und Integralen.

Wie kommen aber jetzt Wavelets in Spiel? Betrachten wir einmal den Unterschied zwischen  $V_1$  und  $V_0$ . Jede Funktion aus  $V_1$  lässt sich als Kombination einer Funktion aus  $V_0$  mit dem Haarwavelet  $\psi_{j,k}$ . Ganz allgemein gilt:

$$V_n = V_{n-1} \oplus W_n,$$

wobei  $W_n = \overline{\text{span}}\{\psi_{2^n, k}\}$ .

D.h. mit jedem  $n$  fügen die Wavelets zusätzliche Details zur Approximation einer Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  hinzu, und

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \bigoplus_{n=0}^{\infty} W_n$$

ist eine orthonormale Zerlegung von  $L^2(\mathbb{R})$ . Eine wichtige Anwendung von Wavelets ist zum Beispiel die Komprimierung von Bilddateien (JPG). Abschnitte eines Bilds, in denen sich nicht viel ändert, können mit Elementen aus  $V_n$  mit kleinem  $n$  dargestellt werden, Kanten/Farbsprünge werden mittels Wavelets hinzugefügt. In diesem Sinn sind Wavelets sehr geeignet um Unstetigkeiten zu finden und zu behandeln.

#### Beispiel 4: Sinc-Funktionen

In der Signalverarbeitung betrachten man oft Signale, deren Frequenzbereich eingeschränkt ist, d.h. die bandbeschränkt sind.

**Definition 3.3.29** (Bandbeschränkt). *Ein Signal  $f(t)$  ist bandbeschränkt, wenn ein endliches  $p$  existiert, sodass  $\hat{f}(s) = 0, \forall |s| > p/2$ . Die kleinste Zahl  $p$ , für die obige Bedingung gilt, heißt Bandbreite.*

Shannons Sampling Theorem besagt, dass jede bandbeschränkte Funktion durch ihre abgetasteten Werte und sinc Funktionen dargestellt werden kann, wobei

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

**Theorem 3.3.30** (Shannon Sampling Theorem). *Sei  $f(t)$  ein bandbeschränktes Signal mit  $\text{supp}(\hat{f}) = (-p/2, p/2)$ , dann gilt:*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{p}\right) \text{sinc}\left(p\left(t - \frac{k}{p}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f(t_k) \text{sinc}(p(t - t_k)).$$

Betrachten wir den Paley-Wiener Raum, d.h. den Raum aller bandbeschränkten Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp} f \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , so bilden die sinc Funktionen eine orthonormale Basis. Das folgt einerseits aus dem Sampling Theorem und dem Theorem von Plancherel, das besagt, dass

$$\langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle$$

ist, wobei,  $\mathcal{F}(f)$  die Fourier-Transformation der Funktion  $f$  ist. Weil die Fouriertransformation von  $e^{2\pi i k t} \chi_{[-1/2, 1/2]}(t)$

$$\mathcal{F}e^{2\pi i k t} \chi_{[-1/2, 1/2]}(t) = \text{sinc}(\tau - k)$$

ist, folgt mit dem Satz von Plancherel, dass

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\tau - k) \text{sinc}(\tau - k') d\tau = \int_{t=-1/2}^{1/2} e^{2\pi i k t} e^{-2\pi i k' t} dt = \int_{t=-1/2}^{1/2} e^{2\pi i (k-k')t} dt = \delta_{k, k'}.$$

Ganz nebenbei: Bitte im Sampling Theorem beachtet, dass der Träger der Fouriertransformation im *offenen* Intervall liegt. Das hat zur Folge, dass die Abtastrate immer (leicht) *größer* als die doppelte Frequenz sein muss. Ansonsten gibt es Aliaseffekte.



# Kapitel 4

## Frames in Hilberträumen

### 4.1 Definition von Frames

Obwohl Basen ein sehr elegantes Werkzeug zur Darstellung von Elementen eines Vektorraums sind, haben sie dennoch einige Nachteile, wie geringere Robustheit gegenüber Störungen, komplizierterer Struktur, Flexibilität, usw. Frames basieren auf dem Konzept, dass die Eindeutigkeit einer Darstellung für mehr Flexibilität aufgegeben wird. Frames stellen jedoch immer noch sicher, dass jedes Element im Vektorraum dargestellt werden kann, und dass sich die Koeffizienten der Darstellung darüber hinaus auch noch relativ gutmütig verhalten. Mit jedem Frame  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ , mit dem ein Vektor sozusagen in seine Koeffizienten “aufgespalten” wird, gibt es mindestens ein duales System  $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ , mit dem diese Koeffizienten wieder fehlerfrei zusammengesetzt werden können.

Frames wurden bereits 1952 von Duffin und Schaeffer [7] eingeführt, aber ihre “große” Zeit kam erst später, als zum Beispiel 1985, Daubechies, Grossmann und Meyer in [6] ihr Potential erkannten.

Am Beginn des Kapitels noch eine kleine Warnung: In unendlich dimensionalen Räumen ist nicht immer alles so trivial, wie es scheint. Selbst wenn zum Beispiel ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  durch den Abschluss der linearen Hülle von Vektoren  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  gebildet werden kann, d.h.  $\mathcal{H} = \overline{\text{span}}\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ , heißt das noch lange *nicht*, dass ich auch jeden Vektor  $v \in \mathcal{H}$  mit Hilfe von  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  darstellen kann:

**Beispiel 4.1.1.** Gegeben ist ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit orthonormaler Basis  $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ , und eine Folge  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  mit  $\phi_k = e_k + e_{k+1}$ .  $\overline{\text{span}}\{\phi_k\}_{k=1}^\infty = \mathcal{H}$ , weil angenommen es gäbe ein  $f \in \mathcal{H}$ , dass nicht durch  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  dargestellt werden kann, dann müsste

$$\langle f, \phi_k \rangle = 0, \forall k \in \mathbb{N},$$

weil  $f$  im orthogonalen Komplement liegen müßte.

Das bedeutet aber, dass  $\langle f, e_k \rangle = -\langle f, e_{k+1} \rangle$ , und dass  $|\langle f, e_k \rangle|$  konstant für alle  $k \in \mathbb{N}$  sein müsste. Da aber

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 < \infty$$

sein muss, kann nur mehr  $\langle f, e_k \rangle = 0$  gelten.

Es ist aber zum Beispiel nicht möglich,  $e_1$  als Linearkombination der  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  darstellen.

Wir werden einmal mit der allgemeinen eher abstrakten Definition beginnen, und dann näher auf die Einzelheiten und die Bedeutung hinter der Definition eingehen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass alle unserer Funktionen aus einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit innerem Produkt  $\langle f, g \rangle$  (in der Regel  $L^2(\mathbb{R})$ ) kommen.

**Definition 4.1.2** (Frame). Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $\{\phi_k\}_{k \in I}$  eine abzählbare Familie von Elementen aus  $\mathcal{H}$ , die nicht alle 0 sind. Diese Familie heißt Frame, wenn für jeder Funktion aus  $\mathcal{H}$  gilt:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k \in I} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad (4.1)$$

wobei die positiven Konstanten  $A > 0$  und  $B > 0$  untere, bzw. obere Frameschranken genannt werden. Für den Fall, dass  $A = B$  sprechen wir von einem tight Frame.

Die obige (unendliche) Summe konvergiert unbeding. Die Framebedingung, die als eine Verallgemeinerung der Formel von Plancherel/Parseval interpretiert werden kann, verbindet die Funktion  $f$  mit ihren Framekoeffizienten  $\langle f, \phi_k \rangle$ , gilt z.B.  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , so sind die Framekoeffizienten in  $\ell^2(I)$ .

**Bemerkung:** : Es kann gezeigt werden, dass es schon reicht, wenn die Framebedingung auf einer dichten Teilmenge von  $\mathcal{H}$  gezeigt werden kann.

**Definition 4.1.3.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathcal{H}$ . Die Folge heißt Framefolge (frame sequence), wenn sie für  $\overline{\text{span}}\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame ist.

## Beispiele

- Sei  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  eine orthonormal Basis für den Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Dann ist

$$\{\phi_k\}_{k=1}^\infty := \{e_1, e_1, e_2, e_2, \dots\}$$

ein tight Frame mit Frameschranke  $A = 2$ .

- Mit der gleichen Voraussetzung wie oben ist mit nur einer Wiederholung

$$\{\phi_k\}_{k=1}^\infty := \{e_1, e_1, e_2, e_3, \dots\}$$

ein Frame mit (optimalen) Frameschranken  $A = 1$  und  $B = 2$ .

- Sei

$$\{\phi_k\}_{k=1}^\infty := \left\{ e_1, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \dots \right\}$$

ein tight Frame mit Frameschranke  $A = 1$ .

## 4.2 Analyse-, Synthese- und Frameoperator

Wie schon im endlich dimensionalen Fall gibt es für eine Frame  $\Phi = \{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  drei wichtige Operatoren, um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die Indexmenge  $I = \mathbb{N}$ :

- **Syntheseoperator**, der einer Folge von Koeffizienten eine Funktion zuordnet:

$$T_\Phi : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}, T_\Phi \{c_k\}_{k=1}^\infty = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \phi_k,$$

- **Analyseoperator**, der einer Funktion ihre Framekoeffizienten zuordnet:

$$T_{\Phi}^* : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}) : T^*(f) := (\langle f, \phi_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}},$$

- **Frameoperator**

$$S_{\Phi} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, S_{\Phi} f = T_{\Phi} T_{\Phi}^* f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k.$$

In [1, 4] wurde gezeigt, wie die verschiedenen Operatoren miteinander zusammenhängen:

**Theorem 4.2.1.** *Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein Frame für  $\mathcal{H}$ . Dann gilt:*

- (i)  $T_{\Phi}^*$  ist ein beschränkter injektiver Operator mit Schranke  $\|T_{\Phi}^*\| \leq \sqrt{B}$ .
- (ii)  $T_{\Phi}$  ist ein beschränkter surjektiver Operator mit Schranke  $\|T_{\Phi}\| \leq \sqrt{B}$ .
- (iii) Der Syntheseoperator ist der adjungierte Operator zum Analyseoperator.
- (iv)  $S_{\Phi}$  ist ein selbst adjungierter, positiver und bijektiver Operator mit  $\|S_{\Phi}\| \leq B$ .
- (v)  $\{S_{\Phi}^{-1} \phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  ist ebenfalls ein Frame für  $\mathcal{H}$  mit Frameschranken  $1/B$  und  $1/A$ .

*Beweis.* Die Beschränktheit in (i) und (ii) folgen im Prinzip aus der Tatsache, dass  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Besselfolge ist. Alternativ können wir für (ii) zeigen, dass  $T_{\Phi}$  wohl definiert ist, d.h. dass die Summe  $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \phi_k$  für alle  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$  konvergiert:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^p c_k \phi_k - \sum_{k=1}^q c_k \phi_k \right\|_{\mathcal{H}} &= \sup_{f \in \mathcal{H}, \|f\|=1} \left| \left\langle \sum_{k=p+1}^q c_k \phi_k, f \right\rangle \right| \leq \\ &\leq \sup_{f \in \mathcal{H}, \|f\|=1} \left( \sum_{k=p+1}^q |c_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=p+1}^q |\langle \phi_k, f \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sqrt{B} \left( \sum_{k=p+1}^q |c_k|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Nachdem jeder Hilbertraum vollständig ist, folgt die Konvergenz.

Betrachten wir nun  $\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k, f \rangle$  für alle  $f \in \mathcal{H}$ :

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k, f \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle \phi_k, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{\langle f, \phi_k \rangle} = \langle \{c_k\}_{k=1}^{\infty}, T_{\Phi}^* f \rangle = \langle T_{\Phi} \{c_k\}_{k=1}^{\infty}, f \rangle.$$

Somit ist der Syntheseoperator die adjungierte Funktion zum Analyseoperator.  $T^*$  ist injektiv, denn gäbe es ein  $f \in \mathcal{H}$  mit  $T^* f = 0$ , wäre

$$0 = \|T^* f\|^2 = \|\{\langle f, \phi_k \rangle\}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \geq A \|f\|^2,$$

also kann in diesem Fall nur  $f = 0$  gelten. Damit folgt die Surjektivität von  $T$  folgt.

Aus beiden obigen Punkten ergibt sich auch, dass  $S_{\Phi}$  beschränkt und selbst adjungiert ist, und dass

$$\|S\| = \|TT^*\| = \|T\| \|T^*\| = \|T\|^2 \leq B.$$

Durch  $\langle S_\Phi f, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2$  ist, ergibt sich durch die Framebedingung

$$A\|f\|^2 \leq \langle S_\Phi f, f \rangle \leq B\|f\|^2, \quad (4.2)$$

und dass  $S_\Phi$  ein positiver Operator ist. Damit und aus der Framebedingung ergibt sich auch:

$$A \operatorname{Id}_{\mathcal{H}} \leq S_\Phi \leq B \operatorname{Id}_{\mathcal{H}}.$$

Diese Behauptung ist im Prinzip nicht so trivial. Zur Motivation betrachten wir die obere Ungleichung

$$B\|f\|^2 - \langle S_\Phi f, f \rangle = B \langle f, f \rangle - \langle S_\Phi f, f \rangle = \langle (B - S_\Phi)f, f \rangle \geq 0,$$

d.h.  $B - S_\Phi$  ist ein positiver Operator.

$$0 \leq \langle (\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - \frac{1}{B} S_\Phi)f, f \rangle \leq \frac{B - A}{B} \|f\|^2$$

und somit

$$\|\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - \frac{1}{B} S_\Phi\| \leq \frac{B - A}{B} < 1.$$

Aus dem Neumann'schen Theorem über die Invertierbarkeit linearer Operatoren (vgl. Konvergenz einer geometrischen Reihe) ergibt sich die Bijektivität von  $S_\Phi$ , und durch Multiplikation<sup>1</sup> mit  $S_\Phi^{-1}$  ergibt sich aus Gleichung (4.2) die Framebedingung

$$\frac{1}{B} \|f\|^2 \leq \langle S_\Phi^{-1} f, f \rangle \leq \frac{1}{A} \|f\|^2.$$

□

Aus den obigen Punkten folgt auch eine der wichtigsten Eigenschaften für Frames:

**Theorem 4.2.2.** *Sei  $\Phi$  ein Frame für  $\mathcal{H}$ . Dann gibt es mindestens einen Frame  $\Psi \in \mathcal{H}$ , sodass*

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, \psi_k \rangle \phi_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, \phi_k \rangle \psi_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (4.3)$$

wobei die Summen unbedingt konvergieren.

*Beweis.* Betrachten wir zunächst einmal die Frames  $\Phi$  und  $\Psi := \{S_\Phi^{-1} \phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Nun gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, \psi_k \rangle \phi_k &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, S_\Phi^{-1} \phi_k \rangle \phi_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle S_\Phi^{-1} f, \phi_k \rangle \phi_k = S_\Phi S_\Phi^{-1} f = f, \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, \phi_k \rangle \psi_k &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, \phi_k \rangle S_\Phi^{-1} \phi_k = S_\Phi^{-1} \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k = S_\Phi^{-1} S_\Phi f = f. \end{aligned}$$

Die unbedingte Konvergenz folgt aus der Tatsache, dass wir jeweils Besselfolgen haben und Korollar 3.3.6. □

<sup>1</sup>Wiederum nicht so trivial.

**Definition 4.2.3** (Duale Frames). *Der Frame  $\Psi := \{S_{\Phi}^{-1}\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  wird auch kanonischer dual Frame genannt, im Allgemeinen, heißen Frames  $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  die Gleichung (4.3) erfüllen, duale Frames zu  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Für jedem Frame gibt es mindestens einen dualen Frame, mit dessen Hilfe eine Funktion zerlegt, bzw. zusammengesetzt werden kann:*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k(t), \quad c_k = \langle f, \psi_k \rangle, \quad (4.4)$$

In den meisten Fällen ist der Frame *redundant*, d.h. es gibt nicht nur einen dualen Frame, sondern gleich mehrere duale Frames, d.h. die Darstellung einer Funktion mittels Framekoeffizienten ist in der Regel *nicht* eindeutig (im nächsten Abschnitt gibt es ein Beispiel). Redundanz ermöglicht eine größere Flexibilität bei der Darstellung einer Funktion, und dass verschiedene Darstellungen verschiedene Eigenschaften haben können. Sprache ist zum Beispiel höchst redundant. So kann ich zum Beispiel laut Duden<sup>2</sup> von einem “durch einen Motor angetriebenes Straßenfahrzeug mit gummibereiften Rädern und offener oder geschlossener Karosserie zum Transport von Personen oder Gütern” sprechen, oder auch kurz und bündig “Auto” sagen.

Andererseits ist eine Darstellung mittels eines redundanten Frame robuster gegenüber Störungen. Wenn zum Beispiel ein Signal mit Hilfe einer Basis dargestellt wird, und auf dem “Transport” ein oder mehrere Koeffizienten verloren gehen, ist auch automatische die damit verbundene Information verloren, bei einem redundanten System, ist es möglich, dass die verlorene Information noch teilweise in anderen Framekoeffizienten enthalten ist.

Im Prinzip ist das Wissen um die Existenz des kanonischen dualen Frames zwar schön und gut, aber die tatsächliche Invertierung des Frameoperator nicht so ganz trivial. Aus diesem Grund werden oft tight Frames bevorzugt, denn für die gilt:

**Theorem 4.2.4.** *Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein tight Frame mit Frameschranke  $A$ , dann ergibt sich der kanonische duale Frame aus  $\{A^{-1}\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ , und*

$$f = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k.$$

*Beweis.* Sei also  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein tight Frame mit Schranke  $A$ , dann gilt:

$$\langle Sf, f \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k, f \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \langle \phi_k, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 = A \|f\|^2 = \langle Af, f \rangle.$$

Daraus folgt, dass  $S = A \text{Id}_{\mathcal{H}}$ , und wenn wir grob gesagt, rechts und links mit  $S^{-1}$  multiplizieren, dass  $S^{-1} = A^{-1} \text{Id}_{\mathcal{H}}$ . Mit Satz 4.2.2 ergibt sich dann der Rest.  $\square$

Im Prinzip ergibt sich für eine tight Frame eine ähnliche Darstellungsformel wie für eine orthonormale Basis, außerdem hat bei dieser Art von Frame mindestens eine dualer Frame die gleichen Eigenschaften, wie der Frame selbst (z.B. Glattheit).

**Beispiel 4.2.5.** Nehmen wir wieder den Frame, der auf der orthonormalen Basis des Hilbertraums basiert. Sei also  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, \dots\}$ .

$$S(e_{\ell}) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_{\ell}, \phi_k \rangle \phi_k = \langle e_{\ell}, e_1 \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_{\ell}, e_k \rangle = \begin{cases} 2e_1 & \text{für } \ell = 1 \\ e_{\ell} & \text{für } \ell > 1 \end{cases}$$

<sup>2</sup>[https://www.duden.de/rechtschreibung/Auto\\_Automobil](https://www.duden.de/rechtschreibung/Auto_Automobil), zuletzt besucht 2.06.2020

bzw.

$$S^{-1}(\phi_k) = \begin{cases} e_1/2 & \text{für } k = 1, 2 \\ e_\ell & \text{für } k > 2 \end{cases}$$

d.h. der kanonische Dualframe ergibt sich aus  $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty = \{e_1/2, e_1/2, e_2, e_3, \dots\}$ . Außerdem kann durch Einsetzen in Gl. (4.3) auch ganz leicht gezeigt werden, dass  $\{0, e_1, e_2, e_3, \dots\}$  und  $\{\frac{1}{4}e_1, \frac{3}{4}e_1, e_2, \dots\}$  duale Frames zu  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  sind.

**Beispiel 4.2.6.** Um den Kreis zum Anfang des Kapitels wieder zu schließen, betrachten wir wieder  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  mit  $\phi_k = e_k + e_{k+1}$ , wobei  $\{e_j\}_{j=1}^\infty$  eine orthonormale Basis von  $\mathcal{H}$  ist. Wir konnten zeigen, dass  $\mathcal{H} = \overline{\text{span}}\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ , aber dass zum Beispiel  $e_1$  nicht durch die  $\phi_k$  dargestellt werden konnte. Es kann zwar gezeigt werden, dass  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  die obere Framebedingung erfüllt, aber  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  erfüllt nicht die untere Bedingung. Betrachten wir zum Beispiel die Vektoren

$$g_j := \sum_{n=1}^j (-1)^{n+1} e_n, j \in \mathbb{N}.$$

Die Norm von  $\|g_j\|^2 = j$  und es gilt

$$\langle g_j, \phi_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j \\ (-1)^{j+1} & \text{für } k = j \end{cases}$$

Daraus folgt, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle g_j, \phi_k \rangle|^2 = 1 = \frac{1}{j} \|g_j\|^2$$

und somit ist die untere Frameschranke  $A$ , die *strikt* größer 0 müsste, nicht erfüllt.

Wenn wir uns an das vorige Kapitel erinnern, wird klar, dass jede Riesz Basis ein Frame ist. Umgekehrt gilt das natürlich nicht. Ein Frame, der keine Riesz Basis ist, wird übrigens *overcomplete* genannt, d.h. die Darstellung ist nicht mehr eindeutig und es gibt Koeffizienten  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N}) \neq 0$  für die  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k = 0$ . Umgekehrt gilt:

**Theorem 4.2.7.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame im Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Dann ist  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  genau dann eine Riesz Basis, wenn aus  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k = 0$  folgt, dass  $c_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$

*Beweis.* Für die eine Richtung benutzen wir, dass jeder Riesz Basis das Bild einer orthonormalen Basis von  $\mathcal{H}$  unter einer beschränkten, bijektiven Abbildung ist. Damit ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k U(e_k) = U \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k (e_k) \right),$$

und, weil  $U$  injektiv und  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  eine Basis ist, folgt daraus, dass alle  $c_k = 0$ .

Umgekehrt bedeutet die "lineare Unabhängigkeit", dass der Syntheseoperator  $T_\Phi$  injektiv ist, und weil  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame ist, ist  $T_\Phi$  auch surjektiv. Betrachten wir nun  $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ , die kanonische Basis von  $\ell^2(\mathbb{N})$ , dann gilt  $\phi_k = T_\Psi \delta_k$ , und nachdem wir jedes  $e_k$  mit  $\delta_k$  verknüpfen können, folgt, dass  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  eine Riesz Basis ist.  $\square$

Ist der Frame keine Basis, ist er redundant (overcomplete). In diesem Fall läßt sich zeigen, dass es nicht nur einen sondern mehrere duale Frames gibt:

**Theorem 4.2.8.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein redundanter Frame. Dann existieren Frames  $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty \neq \{S^{-1}\phi_k\}_{k=1}^\infty$ , für die gilt:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \psi_k \rangle \phi_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

*Beweis.* Sollte es im Frame ein Element  $\phi_\ell$  geben, für das  $\phi_\ell = 0$  ist, ist die Sache einfach. Wir nehmen dann einfach für  $\psi_k = S^{-1}\phi_k$  für  $k \neq \ell$  und für  $\psi_\ell$  einfach einen beliebigen Vektor  $\in \mathcal{H}$ .

Seien nun also alle  $\phi_k \neq 0$ . Weil  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  redundant ist, gibt es mindestens eine Folge  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N}) \setminus \{0\}$  mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k = 0.$$

Für einen dieser Koeffizienten mit  $c_\ell \neq 0$  gilt dann

$$\phi_\ell = -\frac{1}{c_\ell} \sum_{k \neq \ell} c_k \phi_k. \quad (4.5)$$

Können wir jetzt zeigen, dass  $\{\phi_k\}_{k \neq \ell}$  ein Frame ist, gilt, dass  $\psi_k = S^{-1}\phi_k, k \neq \ell$  und  $\psi_\ell = 0$  ein dualer Frame zu  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ist, der nicht der kanonische duale Frame ist.

Die obere Framebedingung für  $\{\phi_k\}_{k \neq \ell}$  ist auf jeden Fall erfüllt, bleibt nur mehr zu zeigen, dass  $\{\phi_k\}_{k \neq \ell}$  auch die untere Bedingung erfüllt. Für ein beliebiges  $f \in \mathcal{H}$ , gilt mit Hilfe von Gl. 4.5 und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |\langle f, \phi_\ell \rangle|^2 &= \left| -\frac{1}{c_\ell} \sum_{k \neq \ell} c_k \langle f, \phi_k \rangle \right|^2 \leq \frac{1}{|c_\ell|^2} \sum_{k \neq \ell} |c_k|^2 \sum_{k \neq \ell} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq \\ &= C \sum_{k \neq \ell} |\langle f, \phi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Nachdem  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame ist, gilt

$$\begin{aligned} A \|f\|^2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq |\langle f, \phi_\ell \rangle|^2 + \sum_{k \neq \ell} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq \\ &\leq (1 + C) \sum_{k \neq \ell} |\langle f, \phi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Nachdem  $C > 0$  per Definition, ist also auch die untere Framebedingung erfüllt.  $\square$

Wie schon im endlich dimensionalen Fall besitzt der kanonische duale Frame wieder die Eigenschaft, dass die Framekoeffizienten, die mit seiner Hilfe ermittelt wurden, die geringste Energie besitzen.

**Theorem 4.2.9.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame für  $\mathcal{H}$  und  $f \in \mathcal{H}$ . Wenn sich  $f = \sum_{k=1}^\infty c_k \phi_k$  mit Hilfe einer Folge  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N})$  darstellen lässt, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, S^{-1}\phi_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k - \langle f, S^{-1}\phi_k \rangle|^2.$$

*Beweis.* Im Prinzip funktioniert der Beweis, wie für den endlichen Fall. Nachdem sich  $f$  sowohl über  $\{c_k\}_{k=1}^\infty$  und  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  mit  $f_k = \langle f, S^{-1}\phi_k \rangle$  darstellen lässt, gilt  $\sum_{k=1}^\infty (c_k - f_k)\phi_k = 0$ , also dass  $\{c_k - f_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^\perp$ , wobei  $\mathcal{N}$  und  $\mathcal{R}$  den Kern und den Wertebereich einer linearen Abbildung bezeichnen.

Daraus folgt:

$$\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 = \|\{c_k\}_{k=1}^\infty - \{f_k\}_{k=1}^\infty + \{f_k\}_{k=1}^\infty\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |c_k - f_k|^2 + |f_k|^2.$$

□

Betrachten wir für einen Frame  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  mit kanonischem Dualframe  $\Psi = \{S^{-1}\phi_k\}_{k=1}^\infty$  den Operator  $T_\Psi^* = \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$  mit

$$T_\Psi^* f = \{\langle f, S^{-1}\phi_k \rangle\}_{k=1}^\infty = \{\langle S^{-1}f, \phi_k \rangle\}_{k=1}^\infty = T_\Phi^*(T_\Phi T_\Phi^*)^{-1} f$$

so folgt, dass

$$T_\Phi T_\Psi^* f = \sum_{k=1}^\infty \langle f, S^{-1}\phi_k \rangle \phi_k = f,$$

und dass somit  $T_\Psi^*$  ein Rechts-inverses von  $T$  ist. Wir wissen aber auch, dass Koeffizienten, die mit dem kanonischen Dualframe berechnet werden, minimale Energie besitzen, d.h. wir haben eine Art Rechts-Pseudoinverse.

Damit ergibt sich auch ein Zusammenhang zwischen dem Konzept einer Pseudoinversen und dem kanonischen dualen Frame. Mit Hilfe Beider können Darstellungen von Vektoren gefunden werden, die minimal bzgl. der Energie sind.

**Theorem 4.2.10.** *Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame mit Syntheseoperator  $T$  und Frameoperator  $S$ . Die Pseudoinverse  $T^\dagger$  von  $T$  ergibt sich aus*

$$T^\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}), T^\dagger f = \{\langle f, S^{-1}\phi_k \rangle\}_{k=1}^\infty.$$

Der Zusammenhang zwischen kanonischem Dual und Pseudoinverser von  $T$  gibt auch eine theoretische Methode, die Frameschranken  $A, B$  zu bestimmen.

**Theorem 4.2.11.** *Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame mit optimalen Frameschranken  $A$  und  $B$ . Dann gilt*

$$A = \|S^{-1}\|^{-1} = \|T^\dagger\|^{-2}, \quad B = \|S\| = \|T\|^2.$$

*Beweis.* Die optimale obere Schranke ergibt sich durch die

$$B = \sup_{\|f\|=1} \sum_{k=1}^\infty |\langle f, \phi_k \rangle|^2 = \sup_{\|f\|=1} \langle Sf, f \rangle = \|S\| = \|TT^*\| = \|T\|^2,$$

weil  $S$  selbst adjungiert ist.

Für die untere Schranke betrachten wir den dualen Frame  $\psi_k = S^{-1}\phi_k$  mit Frameoperator  $S^{-1}$ , dessen optimale obere Frameschranke laut Theorem 4.2.1  $A^{-1}$  ist. Analog zu oben ergibt sich

$$A^{-1} = \|S^{-1}\| = \sup_{\|f\|=1} \sum_{k=1}^\infty |\langle f, \psi_k \rangle|^2 = \sup_{\|f\|=1} \|T^\dagger f\|^2 = \|T^\dagger\|^2.$$

□

### 4.2.1 Frames und Operatoren

In Abschnitt 3.3.3 wurde behandelt, dass Riesz Basen das Bild einer orthogonalen Basis unter einer beschränkten, invertierbaren Abbildung  $U$  sind. Es stellt sich natürlich die Frage, ob es für Frames ähnliche Abbildungen einer Basis gibt, bzw. was passiert, wenn wir das Bild eines Frames betrachten. Nehmen wir also an, dass  $U$  ein beschränkter linearer Operator mit beschränktem Wertebereich  $\mathcal{R}(U)$  ist. In diesem Fall wissen wir aus der linearen Algebra, dass es auch den pseudo-inversen Operator  $U^\dagger$  gibt.

**Theorem 4.2.12.** *Sei  $\Phi = \{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame für  $\mathcal{H}$  mit Frameschranken  $A$  und  $B$ . Sei  $U$  ein beschränkter linearer Operator mit abgeschlossenem Wertebereich. Dann ist  $\{U\phi_k\}_{k=1}^\infty$  eine Framefolge mit Frameschranken  $A\|U^\dagger\|^{-2}$  und  $B\|U\|^2$ .*

*Beweis.* Für  $f \in \mathcal{H}$  gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, U\phi_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle U^*f, \phi_k \rangle|^2 \leq B\|U^*f\|^2 \leq B\|U\|^2\|f\|^2,$$

d.h. Bedingung für die obere Schranke ist einmal erfüllt.

Für die untere Schranke betrachten wir  $g = Uf \in \mathcal{R}(U)$ .  $UU^\dagger$  ist die orthogonale Projektion auf  $\mathcal{R}(U)$  und damit per Definition selbst adjungiert (siehe Lemma A.1.16). Damit ergibt sich

$$g = Uf = (UU^\dagger)Uf = (UU^\dagger)^*Uf = (U^\dagger)^*U^*Uf.$$

Daraus folgt, dass

$$\|g\|^2 \leq \|(U^\dagger)^*\|^2\|U^*Uf\|^2 \leq \frac{\|U^\dagger\|^2}{A} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle U^*Uf, \phi_k \rangle|^2 = \frac{\|U^\dagger\|^2}{A} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Uf, U\phi_k \rangle|^2,$$

und dass

$$\frac{A}{\|U^\dagger\|^2}\|g\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle g, U\phi_k \rangle|^2.$$

D.h. die Framebedingung ist für alle  $g \in \text{span}\{U\phi_k\}$  erfüllt, und weil es reicht, dass die Framebedingung auf einer dichten Teilmenge erfüllt ist, gilt sie auch für  $g \in \overline{\text{span}\{U\phi_k\}}$ .  $\square$

**Korollar 4.2.13.** *Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame für den Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit Frameschranken  $A, B$  und  $U$  ein beschränkter, surjektiver Operator. Dann ist  $\{U\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame für  $\mathcal{H}$  mit Schranken  $A\|U^\dagger\|^{-2}$  und  $B\|U\|^2$ .*

**Lemma 4.2.14.** *Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  eine Framefolge mit Schranken  $A$  und  $B$  und  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ein unitärer Operator. Dann ist  $\{U\phi_k\}_{k=1}^\infty$  eine Framefolge mit den gleichen Schranken. Ist  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame, so gilt das auch für  $\{U\phi_k\}_{k=1}^\infty$ .*

*Beweis.* Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, U\phi_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle U^*f, \phi_k \rangle|^2$$

und weil  $U$  unitär ist, gilt

$$\|U^*f\|^2 = \langle U^*f, U^*f \rangle = \langle Uf, Uf \rangle = \langle f, f \rangle = \|f\|^2$$

$\square$

**Theorem 4.2.15.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame für  $\mathcal{H}$  mit Frameoperator  $S$ . Sei  $S^{-1/2}$  die positive Wurzel von  $S^{-1}$ . Dann ist  $\{S^{-1/2}\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein tight Frame mit Frameschranke  $A = 1$  und

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1/2}\phi_k \rangle S^{-1/2}\phi_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

*Beweis.* Die Existenz von  $S^{-1/2}$  folgt aus der Tatsache, dass  $S$  beschränkt und positiv ( $\langle Sf, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2$ ) ist. Außerdem gibt es einen Satz aus der linearen Algebra bzw. der Funktionentheorie, der besagt, dass  $S^{-1/2}$  mit  $S$  kommutativ vertauschbar ist. Damit ergibt sich

$$f = S^{-1}Sf = S^{-1/2}SS^{-1/2}f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-1/2}f, \phi_k \rangle S^{-1/2}\phi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1/2}\phi_k \rangle S^{-1/2}\phi_k.$$

und

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, S^{-1/2}\phi_k \rangle|^2.$$

□

Eine weitere Frage, die sich stellt, ist folgende: “Wenn wir einen Frame auf  $\mathcal{H}$  haben, und wir betrachten die orthogonale Projektion von  $\mathcal{H}$  auf einen abgeschlossenen Unterraum  $V$ . Ist dann die Projektion von  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  wieder ein Frame für  $V$ ?

**Theorem 4.2.16.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame für  $\mathcal{H}$  mit Frameschranken  $A, B$ . Sei  $P$  die orthogonale Projektion von  $\mathcal{H}$  auf einen abgeschlossenen Unterraum  $V$ . Dann gilt

(i)  $\{P\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ist ein Frame für  $V$  mit Frameschranken  $A, B$ .

(ii) Umgekehrt gilt für einen Frame  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  auf  $V$  mit Operator  $S$ , dass die orthogonale Projektion von  $\mathcal{H} \rightarrow V$  durch

$$Pf = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}\phi_k \rangle \phi_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

gegeben ist.

*Beweis.* Für den ersten Teil benutzen wir, dass eine orthogonale Projektion selbst adjungiert ist, und somit

$$\langle f, P\phi_k \rangle = \langle Pf, \phi_k \rangle = \langle f, \phi_k \rangle, \quad \forall f \in V.$$

Für den zweiten Teil nutzen wir, dass  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame für  $V$  ist, und somit  $S$  und  $S^{-1}$  Bijektionen sind. Damit ergibt sich  $S^{-1}\phi_k \in V$ . Damit gilt  $Pg = 0, \forall g \in V^\perp$ , und

$$P(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}\phi_k \rangle \phi_k = f, \quad \forall f \in V.$$

□

**Vorsicht:**

Das bedeutet aber lange noch nicht, dass der kanonische Dualframe der Projektion, die Projektion vom kanonischen Dualframe ist.

**Beispiel 4.2.17.** Betrachten wir wieder den Frame

$$\phi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

wir haben bereits gezeigt, dass

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und der kanonische Dualframe durch

$$\psi = \left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben ist.

Betrachten wir nun den Raum  $V$  der durch  $(1, -1)^\top$  und  $(1, 1)^\top$  aufgespannt wird, ergibt sich der kanonische Dualframe für  $V$  durch  $(1/2, -1/2)^\top$  und  $(1/2, 1/2)^\top$ .

Außerdem sehen wir in diesem Beispiel auch schön den Zusammenhang zwischen kanonischem Dualframe  $\{S^{-1}\phi_k\}_{k=1}^\infty$  und der Pseudoinversen. Wenn wir die Matrix  $\mathbf{T}$ , wobei die  $i$ -te Spalte  $\mathbf{T}_i$  das  $i$ -te Frameelement darstellt, ergeben sich die Element des dualen Frames aus den Spalten von

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T} = (\mathbf{T}\mathbf{T}^\mathbf{H})^{-1}\mathbf{T} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das ist aber auch gleich die (Pseudo)Linksinverse vom Analyseoperator  $T^*$ .

## 4.2.2 Reduzierung von Frames

Im Gegensatz zu einer Basis ist eine Frame redundant, und es stellt sich die Frage, was passiert, wenn ein Element aus dem Frame entfernt wird. Ist er dann immer noch ein Frame? Oder gar eine Basis? Oder keines der beiden? Mit Hilfe des nächsten Satz lässt sich diese Frage einfach beantworten:

**Theorem 4.2.18.** Sei  $\Phi = \{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame für  $\mathcal{H}$ .

(i) Wenn  $\langle \phi_j, S^{-1}\phi_j \rangle \neq 1$ , ist  $\{\phi_k\}_{k \neq j}$  ein Frame für  $\mathcal{H}$ ,

(ii) Gilt  $\langle \phi_j, S^{-1}\phi_j \rangle = 1$ , ist  $\{\phi_k\}_{k \neq j}$  nicht mehr komplett.

*Beweis.* Sei  $j \in \mathbb{N}$  zufällig ausgewählt. Dann gilt

$$\phi_j = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \phi_j, S^{-1}\phi_k \rangle \phi_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k,$$

wobei  $a_k := \langle \phi_j, S^{-1}\phi_k \rangle$ . Außerdem gilt  $\phi_j = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{j,k} \phi_k$ , wobei  $\delta_{j,k}$  das Kronecker Delta ist. Wir haben also zwei verschiedene Darstellungen eines Vektors, und wir wissen, dass die Darstellung mit Hilfe des dualen Frames die kleinste Energie besitzt, d.h.

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} |\delta_{j,k}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\delta_{j,k} - a_k|^2 = |a_j|^2 + 2 \sum_{k \neq j} |a_k|^2 + |a_j - 1|^2.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:  $a_j = \langle \phi_j, S^{-1}\phi_j \rangle = 1$  und  $a_j = \langle \phi_j, S^{-1}\phi_j \rangle \neq 1$ .

Nehmen wir einmal an, dass  $a_j = 1$ . Dann ergibt die obige Gleichung, dass  $\sum_{k \neq j} |a_k|^2 = 0$ , und somit folgt

$$0 = a_k = \langle S^{-1}\phi_j, \phi_k \rangle.$$

Nachdem  $a_j \neq 0$ , kann  $S^{-1}\phi_j$  auch nicht 0 sein. Wir haben also ein Element gefunden, das nicht null ist, und das orthogonal zu allen  $\phi_k, k \neq j$  ist. Damit ist aber  $\{\phi_k\}_{k \neq j}$  nicht vollständig, und damit nicht ein Frame für ganz  $\mathcal{H}$ .

Sei also  $a_j \neq 1$ . Dann gilt

$$\phi_j = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \phi_j, S^{-1}\phi_k \rangle \phi_k = a_j \phi_j + \sum_{k \neq j} a_k \phi_k,$$

bzw.

$$\phi_j = \frac{1}{1 - a_j} \sum_{k \neq j} a_k \phi_k.$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 &= \left| \frac{1}{1 - a_j} \sum_{k \neq j} a_k \langle f, \phi_k \rangle \right|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{|1 - a_j|^2} \sum_{k \neq j} |a_k|^2 \sum_{k \neq j} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 = C \sum_{k \neq j} |\langle f, \phi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \leq (1 + C) \sum_{k \neq j} \langle f, \phi_k \rangle,$$

also wird die untere Framebedingung erfüllt. Die obige Framebedingung wird durch das Weglassens eines Elements im Frame nicht geändert (die optimale Frameschranke wird vielleicht kleiner). Also ist  $\{\phi_k\}_{k \neq j}$  ein Frame für  $\mathcal{H}$ .  $\square$

### 4.2.3 Frames und Pre-Frameoperator

Die Eigenschaften eines Frames sind sehr mit den Eigenschaften von Analyse-,Synthese- und Frameoperator verbunden, siehe z.B. die Herleitung der optimalen Frameschranken. Der nächste Satz stellt einen Zusammenhang zwischen Frameeigenschaft und Beschränktheit des Syntheseoperator  $T$  her:

**Theorem 4.2.19.** *Eine Folge  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  in  $\mathcal{H}$  ist genau dann ein Frame wenn der Syntheseoperator*

$$T : \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$$

eine wohl definierte Abbildung von  $\ell^2(\mathbb{N})$  auf  $\mathcal{H}$  ist.

*Beweis.* Wenn  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein Frame ist, ist  $T$  ein beschränkter Operator von  $\ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$ , was sich leicht zeigen lässt, weil die Folge der Teilsummen eine Cauchyfolge bildet. Außerdem haben wir bereits gezeigt, dass der Frameoperator  $S = TT^*$  surjektiv ist, also ist auch  $T$  surjektiv, und damit wohldefiniert.

Nehmen wir also jetzt an, dass  $T$  ein wohl definierter Operator von  $\ell^2(\mathbb{N})$  auf  $\mathcal{H}$  ist, d.h.  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$  ist für alle  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$  konvergent. Wenn wir die  $n$ -ten Teilsummen mit  $T_n$  bezeichnen, konvergieren die  $T_n$  punktweise gegen  $T$ , weil  $T$  wohldefiniert ist, und  $T$  ist als Grenzwert von beschränkten Operatoren beschränkt (ohne Beweis). Nachdem  $T$  ein beschränkter Operator ist, ist auch  $T^*$  beschränkt und somit gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 = \|T^* f\|^2 \leq \|T^*\|^2 \|f\|^2 = \|T\|^2 \|f\|^2.$$

Sei  $T^\dagger$  die Pseudoinverse von  $T$  mit  $f = TT^\dagger f = \sum_{k=1}^{\infty} (T^\dagger f)_k \phi_k$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f\|^4 &= |\langle f, f \rangle|^2 = \left| \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} (T^\dagger f)_k \phi_k, f \right\rangle \right|^2 \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |(T^\dagger f)_k|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq \|T^\dagger\|^2 \|f\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Damit sind beide Framebedingungen erfüllt, und  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  ist ein Frame mit Frameschranken  $A = \frac{1}{\|T^\dagger\|^2}$  und  $B = \|T\|^2$ .  $\square$

#### 4.2.4 Frames als Bild einer Basis

**Theorem 4.2.20.** *Sei  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine beliebige orthonormale Basis für  $\mathcal{H}$ . Alle Frames für  $\mathcal{H}$  sind genau die Familien  $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ , wobei  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  eine beschränkte, surjektive Abbildung ist.*

*Beweis.* Sei  $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$  die kanonische Basis von  $\ell^2(\mathbb{N})$ . Dann können wir die Orthonormalbasis  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  für  $\mathcal{H}$  mit der kanonischen Basis  $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$  von  $\ell^2(\mathbb{N})$  identifizieren:  $We_k = \delta_k$ . Wenn  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein Frame ist, dann ist der Syntheseoperator beschränkt und surjektiv und  $T\delta_k = \phi_k$ . D.h.  $\phi_k = TWe_k = Ue_k$ , und  $U$  ist beschränkt und surjektiv.

Umgekehrt ist  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein Frame, weil der Frameoperator

$$T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k Ue_k = U \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right)$$

wohl definiert und surjektiv ist.  $\square$

### 4.3 Stabilität und Störung von Frames

In der Numerik stellt sich oft die Frage von Stabilität, d.h. wie “weit” dürfen wir uns von einem Frame  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  entfernen, um immer noch die Frameeigenschaft erhalten zu können.

**Theorem 4.3.1.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit Frameschranken  $A$  und  $B$ . Sei  $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathcal{H}$ , und  $\lambda, \mu > 0$  zwei positive Konstanten mit  $\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} \leq 1$ . Gilt

$$\left\| \sum_I c_k (\phi_k - \psi_k) \right\| \leq \lambda \left\| \sum_I c_k \phi_k \right\| + \mu \left( \sum_I |c_k|^2 \right)^{1/2}$$

für alle endlichen Folgen  $\{c_k\}_{k \in I}$ . Dann ist  $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame mit Frameschranken

$$A \left( 1 - \left( \lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} \right) \right)^2, B \left( 1 + \lambda + \frac{\mu}{\sqrt{B}} \right)^2.$$

*Beweis.* Sei also  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame für  $\mathcal{H}$  und erfüllt  $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$  obige Bedingung. Dann gilt für jede endliche Folge  $\{c_k\}_{k \in I}$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_I c_k \psi_k \right\| &= \left\| \sum_I c_k \phi_k + \sum_{k \in I} c_k (\psi_k - \phi_k) \right\| \leq \\ &\leq \left\| \sum_{k \in I} c_k \phi_k \right\| + \left\| \sum_{k \in I} c_k (\psi_k - \phi_k) \right\| \leq \\ &\leq (1 + \lambda) \left\| \sum_{k \in I} c_k \phi_k \right\| + \mu \left( \sum_{k \in I} |c_k|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Sei nun  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N})$ . Dann gilt für  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n > m$

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \psi_k - \sum_{k=1}^m c_k \psi_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n c_k \psi_k \right\| \leq (1 + \lambda) \left\| \sum_{k=m+1}^n c_k \phi_k \right\| + \mu \left( \sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Nachdem  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame ist, und  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N})$ , ist  $\sum_{k=1}^\infty c_k \phi_k$  konvergent, und es folgt, dass die Teilsummen von  $\sum_{k=1}^\infty c_k \psi_k$  eine Cauchyfolge bilden, und somit die Summe konvergiert, d.h. der ‘‘Synthese’’operator

$$T_\psi : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}, \{c_k\}_{k=1}^\infty \rightarrow \sum_{k=1}^\infty c_k \psi_k$$

ist wohldefiniert und

$$\begin{aligned} \|T_\psi \{c_k\}_{k=1}^\infty\| &\leq (1 + \lambda) \|T_\phi \{c_k\}_{k=1}^\infty\| + \mu \|\{c_k\}_{k=1}^\infty\| \leq \\ &\leq \left( (1 + \lambda) \sqrt{B} + \mu \right) \|\{c_k\}_{k=1}^\infty\|, \quad \forall \{c_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N}), \end{aligned}$$

wobei  $T_\phi$  der Analyseoperator von  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ist.  $T_\psi$  ist also wohldefiniert und beschränkt, und somit ist  $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$  zumindest schon einmal eine Besselfolge mit oberer Schranke

$$B \left( 1 + \lambda + \frac{\mu}{\sqrt{B}} \right)^2.$$

Nachdem  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k$  für alle  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$  wohldefiniert sind, ist die obige Bedingung nicht nur für endliche Folgen erfüllt, sondern allgemein für alle Folgen  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ . Ausgedrückt durch die Syntheseoperatoren  $T_{\Phi}$  und  $T_{\Psi}$  gilt

$$\|T_{\Phi}\{c_k\}_{k=1}^{\infty} - T_{\Psi}\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\| \leq \lambda \|T\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\| + \mu \|\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\|. \quad (4.6)$$

Für die unterer Frameschranke betrachten wir die Pseudoinverse von  $T_{\Phi}$

$$T_{\Phi}^{\dagger} f := T_{\Phi}^*(T_{\Phi}T_{\Phi}^*)^{-1} f = \left\{ \langle (T_{\Phi}T_{\Phi}^*)^{-1} f, \phi_k \rangle \right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \langle f, S^{-1}\phi_k \rangle \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Dann gilt

$$\|T_{\Phi}^{\dagger} f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, S^{-1}\phi_k \rangle|^2 \leq \frac{1}{A} \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Per Definition gilt  $T_{\Phi}T_{\Phi}^{\dagger} f = f$  und

$$T_{\Psi}T_{\Phi}^{\dagger} f = \sum_{k=1}^{\infty} (T_{\Phi}^{\dagger} f)_k \psi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S_{\Phi}^{-1}\phi_k \rangle \psi_k.$$

Betrachten wir nun die Folge  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = T_{\Phi}^{\dagger} f$ , ergibt sich mit Gl. (4.6)

$$\|f - T_{\Psi}T_{\Phi}^{\dagger} f\| = \|T_{\Phi}T_{\Phi}^{\dagger} f - T_{\Psi}T_{\Phi}^{\dagger} f\| \leq \lambda \|f\| + \mu \|T_{\Phi}^{\dagger} f\| \leq \left( \lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} \right) \|f\|, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

und weil per Definition  $\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} < 1$  folgt (siehe Th. A.1.4), dass  $T_{\Psi}T_{\Phi}^{\dagger}$  invertierbar ist, d.h.

$$f = T_{\Psi}T_{\Phi}^{\dagger} \left( T_{\Psi}T_{\Phi}^{\dagger} \right)^{-1} f = \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \left( T_{\Psi}T_{\Phi}^{\dagger} \right)^{-1} f, S^{-1}\phi_k \right\rangle \psi_k. \quad (4.7)$$

Darüber hinaus gilt

$$\|T_{\Psi}T_{\Phi}^{\dagger}\| = \|T_{\Psi}T_{\Phi}^{\dagger} - I + I\| \leq 1 + \|T_{\Psi}T_{\Phi}^{\dagger} - I\| \leq 1 + \lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}}$$

und

$$\|T_{\Psi}T_{\Phi}^{\dagger}\| = \|I - (I - T_{\Psi}T_{\Phi}^{\dagger})\| \geq 1 - \left( \lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} \right)$$

bzw.

$$\left\| \left( T_{\Psi}T_{\Phi}^{\dagger} \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \left( \lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} \right)}.$$

Deswegen ergibt sich mit Gl. (4.7)

$$\begin{aligned} \|f\|^4 &= |\langle f, f \rangle|^2 = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \left( T_{\Psi}T_{\Phi}^{\dagger} \right)^{-1} f, S^{-1}\phi_k \right\rangle \langle \psi_k, f \rangle \right|^2 \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\langle \left( T_{\Psi}T_{\Phi}^{\dagger} \right)^{-1} f, S^{-1}\phi_k \right\rangle \right|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \psi_k, f \rangle|^2 \leq \frac{1}{A} \|(T_{\Psi}T_{\Phi})^{-1} f\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \psi_k, f \rangle|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{A} \left( \frac{1}{1 - \left( \lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} \right)} \right)^2 \|f\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \psi_k, f \rangle|^2. \end{aligned}$$

Damit ist aber auch die untere Framebedingung erfüllt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \psi_k \rangle|^2 \geq A \left( 1 - \left( \lambda + \frac{\mu}{\sqrt{A}} \right) \right)^2 \|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}.$$

□

**Beispiel 4.3.2.** Sei  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine orthonormale Basis für  $\mathcal{H}$  und betrachten wir die gestörte Basis

$$g_k = e_k + a_k e_{k+1}, k \in \mathbb{N},$$

mit  $a = \sup_k |a_k| < 1$ . Dann besagt das obige Theorem, dass  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein Frame mit Schranken  $A = (1 - a)^2$  und  $B = (1 + a)^2$  ist.

**Korollar 4.3.3.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein Frame für  $\mathcal{H}$  mit Schranken  $A, B$ . Sei  $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Folge in  $\mathcal{H}$ , und sei  $R < A$  eine Konstante mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \phi_k - \psi_k \rangle|^2 \leq R \|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}.$$

Dann ist  $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein Frame für  $\mathcal{H}$  mit Schranken

$$A \left( 1 - \sqrt{\frac{R}{A}} \right)^2, B \left( 1 + \sqrt{\frac{R}{B}} \right)^2.$$

*Beweis.* Wir setzen im obigen Theorem einmal  $\lambda = 0$  und  $\mu = \sqrt{R}$ . Wir haben jetzt nur noch das Problem, dass die Bedingung im obigen Theorem mit dem Syntheseoperator in Verbindung steht, wir aber hier eine Bedingung im Zusammenhang mit dem Analyseoperator angeführt haben. Diese Bedingung impliziert aber, dass  $T_{\Psi^* - \Phi}$  ein Operator mit beschränkter Norm ist, weswegen auch  $T_{\Psi - \Phi}$  beschränkte Norm mit gleiche Schranke hat. □

### 4.3.1 Duale Frames

Wie wir schon wissen, gibt es für einen redundanten Frame in der Regel mehr als einen dualen Frame, und es stellt sich die Frage, wie diese dualen Frames mit dem kanonischen dualen Frame zusammenhängen. Wir wissen ja z.B. schon, dass die Koeffizienten, die mit Hilfe des kanonischen Duals ermittelt werden, im Prinzip die geringste Energie besitzen. Wir beginnen mit ein paar kleineren Lemmata:

**Lemma 4.3.4.** Seien  $\Phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  und  $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  zwei Besselfolgen in  $\mathcal{H}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

$$(i) f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \psi_k \rangle \phi_k, \forall f \in \mathcal{H}.$$

$$(ii) f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \psi_k, \forall f \in \mathcal{H}.$$

$$(iii) \langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \langle \psi_k, g \rangle, \forall f, g \in \mathcal{H}.$$

Wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind, dann sind  $\Phi$  und  $\Psi$  duale Frames für  $\mathcal{H}$ . Wenn  $B$  eine obere Frameschranke für  $\Phi$  ist, ist  $B^{-1}$  eine untere Schranke für  $\Psi$ .

*Beweis.* Betrachten wir einmal die Syntheseoperatoren  $T_\Phi$  und  $T_\Psi$ . Dann ist Punkt (i) gleichbedeutend mit  $T_\Phi T_\Psi^* = I$ , woraus aber auch gleich mit  $I^* = I = T_\Psi T_\Phi^*$  Punkt (ii) folgt. Das gleiche gilt in umgekehrter Richtung. Und wenn (ii) gilt, folgt durch einfaches Einsetzen auch, dass (iii) gilt.

Umgekehrt betrachten wir ein fixes  $f \in \mathcal{H}$ , und weil sowohl  $\Phi$  als auch  $\Psi$  Besselfolgen sind, wissen wir, dass  $\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \psi_k$  wohl definiert ist. (iii) bedeutet nun, dass

$$\left\langle f - \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \psi_k, g \right\rangle = 0, \quad \forall g \in \mathcal{H},$$

woraus sich (ii) ergibt.

Wenn alle Bedingungen erfüllt sind, gilt

$$\begin{aligned} \|f\|^4 &= |\langle f, f \rangle|^2 = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \langle \psi_k, f \rangle \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle \langle \psi_k, f \rangle|^2 \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \psi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Weil  $\Phi$  eine Besselfolge ist, gilt

$$\|f\|^4 \leq B \|f\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \psi_k \rangle|^2,$$

womit die untere Framebedingung für  $\Psi$  mit Schranke  $\frac{1}{B}$  erfüllt ist. Die Rollen von  $\Psi$  und  $\Phi$  lassen sich aber leicht vertauschen, woraus folgt, dass beide Frames sind.  $\square$

**Lemma 4.3.5.** *Sei  $\Phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein Frame für  $\mathcal{H}$  und  $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$  die kanonische Orthonormalbasis für  $\ell^2(\mathbb{N})$ . Die dualen Frames von  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  sind dann genau alle Folgen  $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} = \{U\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ , wobei  $U : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$  ein beschränkter Operator ist, für den  $UT_\Phi^* = I$  gilt, wobei  $T^*$  der Syntheseoperator des Frames ist.*

*Beweis.* Wenn  $U$  also ein beschränkter links-inverser Operator für  $T_\Phi^*$  ist, muss  $U$  surjektiv sein. Nachdem  $U$  auch beschränkt ist, und

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k U(\delta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} U(c_k) < \infty$$

ist  $U$  ein wohldefinierter und surjektiver ‘‘Syntheseoperator’’ für die Folge  $\psi_k = U(\delta_k)$ , womit mit Satz 4.2.19 folgt, dass  $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein Frame ist. Für alle  $f \in \mathcal{H}$  gilt

$$f = UT_\Phi^* f = U \{ \langle f, \phi_k \rangle \}_{k=1}^{\infty} = U \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \delta_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \psi_k.$$

Also ist  $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein dualer Frame für  $\Phi$ .

Umgekehrt gilt für jeden dualen Frame  $\Psi$ , dass  $T_\Psi$  beschränkt, surjektiv und ein Linksinverses zum  $T_\Phi^*$  ist. Per Definition ist  $\Psi_k = T_\Psi \delta_k$  und es gilt  $T_\Psi T_\Phi^* = I$   $\square$

Stellt sich nur noch die Frage, wie denn überhaupt alle beschränkten Linksinversen von  $T_\Phi^*$  aussehen.

**Lemma 4.3.6.** *Sei  $\Phi = \{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame für  $\mathcal{H}$  mit Syntheseoperator  $T_\Phi$ . Die beschränkten Linksinversen  $U$  von  $T_\Phi^*$  sind genau alle Operatoren der Form*

$$U = S_\Phi^{-1}T_\Phi + W(I - T_\Phi^*S_\Phi^{-1}T_\Phi),$$

wobei  $W : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$  ein beschränkter Operator ist, und  $I$  die Identität auf  $\ell^2(\mathbb{N})$  ist.

*Beweis.* Sei also

$$U = S_\Phi^{-1}T_\Phi + W(I - T_\Phi^*S_\Phi^{-1}T_\Phi).$$

Dann gilt

$$UT_\Phi^* = S_\Phi^{-1}T_\Phi T_\Phi^* + W(T_\Phi^* - T_\Phi^*S_\Phi^{-1}T_\Phi T_\Phi^*) = I - W(T_\Phi^* - T_\Phi^*) = I.$$

Ist umgekehrt  $U$  ein beschränktes Linksinverses von  $T_\Phi^*$ , so gilt mit  $W = U$

$$S_\Phi^{-1}T_\Phi + U(I - T_\Phi^*S_\Phi^{-1}T_\Phi) = S_\Phi^{-1}T_\Phi + U - S_\Phi^{-1}T_\Phi = U.$$

□

Mit Hilfe der obigen Lemmata ist es nun möglich, einen Zusammenhang zwischen allen dualen Frames eines gegebenen Frames  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  zu zeigen.

**Theorem 4.3.7.** *Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein Frame für  $\mathcal{H}$ . Die dualen Frames für  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  sind genau alle Familien*

$$\{\psi_k\}_{k=1}^\infty = \left\{ S^{-1}\phi_k + h_k - \sum_{j=1}^\infty \langle S^{-1}\phi_k, \phi_j \rangle h_j \right\}_{k=1}^\infty,$$

wobei  $\{h_k\}_{k=1}^\infty$  eine Besselfolge in  $\mathcal{H}$  ist.

*Beweis.* Lemma 4.3.5 zeigt, wie jeder duale Frame mit Hilfe eines beschränkten Linksinversen gebildet werden kann, Lemma 4.3.6 zeigt, wie alle diese Inversen aussehen. Die Kombination ergibt also, dass

$$\{\psi_k\}_{k=1}^\infty = \{S_\Phi^{-1}T_\Phi \delta_k + W(I - T_\Phi^*S_\Phi^{-1}T_\Phi)\delta_k\}_{k=1}^\infty,$$

wobei  $W$  ein beschränkter linearer Operator ist, bzw. ein Operator der Form

$$W : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}, W\{c_k\}_{k=1}^\infty = \sum_{k=1}^\infty c_k h_k$$

mit einer Besselfolge  $\{h_k\}_{k=1}^\infty$  ist. Damit ergibt sich aber

$$\{\psi_k\}_{k=1}^\infty = \left\{ S_\Phi^{-1}\phi_k + h_k - \sum_{j=1}^\infty \langle S_\Phi^{-1}\phi_k, \phi_j \rangle h_j \right\}_{k=1}^\infty.$$

□

Wir können natürlich auch umgekehrt sagen, dass, wenn  $\{c_k\}_{k=1}^\infty$  eine Lösung von

$$f = \sum_{k=1}^\infty c_k \phi_k = T_\Phi\{c_k\}_{k=1}^\infty \tag{4.8}$$

ist, ist auch  $\{c_k\}_{k=1}^\infty + \{d_k\}_{k=1}^\infty$  für alle  $d \in \mathcal{N}(T_\Phi)$  eine Lösung von Gl. (4.8) ist.

## 4.4 Projektion und Frames

Wenn wir in Richtung Anwendung gehen, ergibt sich das Problem, dass Frames, die auf dem gesamten Hilbertraum  $\mathcal{H}$  definiert sind, zwar gut und schön sind, aber in der Regel auch unendlich viele Frameelemente besitzen, und somit für praktische Implementierungen nur bedingt verwendbar sind. In den meisten Fällen wird es notwendig sein, die Frames auf  $\mathcal{H}$  auf einen endliche dimensionalen Teilraum zu beschränken, d.h. wir beschäftigen uns eher mit Framefolgen als mit Frames. Dabei spielt dann die bereits oben erwähnte Projektion auf den Unterraum  $V$ , der durch eine zwangsweise endliche Anzahl von Frameelementen aufgespannt wird, eine wichtige Rolle:

$$P_V f = \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \psi_n = \sum_{n=1}^N \langle f, \psi_n \rangle \phi_n = (TT^*)^{-1} TT^* f,$$

wobei es wichtig ist, dass der duale Frame für  $V$  im allgemeinen *nicht* aus Frameelementen vom dualen Frame für  $\mathcal{H}$  bestehen wird. Nachdem  $\Phi$  nicht ein Frame für den gesamten Raum ist, ist der Frameoperator  $(TT^*)$  auch nur auf dem Unterraum  $V$  invertierbar.

Wenn der (endliche) Frame, der den Vektorraum  $V$  aufspannt, schon bekannt ist, ist es möglich den dualen Frame im Vorhinein zu bestimmen, aber oft kommt es vor, dass die Auswahl der Frameelemente adaptiv erfolgt. Im Prinzip können wir zwei Arten von Problem definieren.

Beim *dualen Synthese* Problem kennen wir die Framekoeffizienten  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  und wir können zunächst einmal  $y = T\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = TT^* f$  berechnen. Für die Projektion

$$\tilde{f} = (TT^*)^{-1} y = S^{-1} y$$

muss nun der Frameoperator  $S$  (numerisch) invertiert werden. Bitte auch beachten, dass im obigen Problem schon vorausgesetzt wurde, dass die Koeffizienten bereits im Wertebereich von  $T^*$  liegen.

Beim *dualen Analyse* Problem, ergibt sich eine ähnliche Konstellation. Nachdem wir hier mehr oder weniger den dual Frame brauchen,

$$f_k = (TT^*)^{-1} T^* f$$

stellt sich wiederum das Problem, wie der Frameoperator invertiert werden soll.

In beiden Fällen stellt sich also die Frage der Invertierung des symmetrischen Operators / einer symmetrischen Matrix. In [10] wurden dazu zwei Algorithmen vorgestellt, nämlich die *Richardson Iteration* und *Conjugate Gradient* Iteration.

### 4.4.1 Richardson Iteration

Die Richardson Iteration ist ein relativ einfaches Verfahren, das aber, wie wir später sehen werden, zur Fehler-, bzw Konvergenzschätzung Kenntnis der Frameschranken  $A$  und  $B$  benötigt.

**Theorem 4.4.1.** *Gesucht sei die Lösung  $z = S^{-1}y$ , wobei  $S$  ein symmetrischer Operator ist. Seien  $z_0$  und  $\gamma > 0$  ein vorgegebener Startwert, bzw. ein vorgegebener Relaxationsparameter. Für  $k > 0$  wird der  $k$ -te Iterationsschritt durch*

$$z_k = z_{k-1} + \gamma(y - Sz_{k-1})$$

definiert. Wenn nun

$$\delta = \max \{|1 - \gamma A|, |1 - \gamma B|\} < 1,$$

dann gilt, dass

$$\|z - z_k\| \leq \delta^k \|z - z_0\|.$$

*Beweis.* Betrachten wir

$$z - z_k = z - z_{k-1} - \gamma S(z - z_{k-1})$$

und definieren

$$R = I - \gamma S.$$

Damit ergibt sich

$$z - z_k = R(z - z_{k-1}) = R^k(z - z_0).$$

Nachdem  $S$  ein Frameoperator ist, wissen wir, dass die Eigenwerte von  $S$  zwischen  $A$  und  $B$  liegen, und dass für  $R = I - \gamma S$

$$|\langle Rz, z \rangle| \leq \delta \|z\|^2.$$

Weil  $R$  selbst adjungiert ist, folgt mit Lemma A.1.13, dass  $\|R\| \leq \delta$  und das Verfahren konvergiert, wenn  $\delta < 1$ .  $\square$

Der Richardson Algorithmus wird auch oft *Framealgorithmus* genannt, und die Konvergenzrate kann optimiert werden, wenn  $\delta$  möglichst klein ist, d.h. wenn

$$\gamma = \frac{2}{A+B}, \text{ bzw. } \delta = \frac{B-A}{B+A} = \frac{1 - \frac{A}{B}}{1 + \frac{A}{B}}.$$

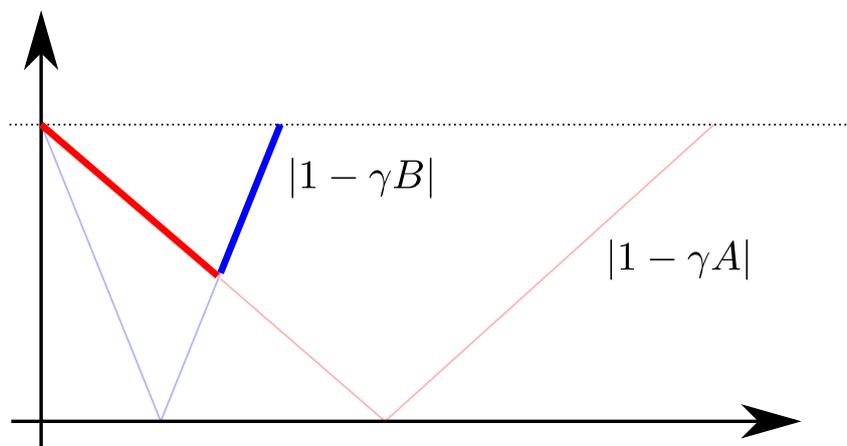


Abbildung 4.1: Relaxationsparametergeraden

### 4.4.2 Conjugate Gradient Invertierung

**Theorem 4.4.2** (Conjugate Gradient). *Zu Lösen ist das System  $z = S^{-1}y$  mit Anfangswert  $z_0 = 0$ , und Parametern  $r_0 = p_0 = y, p_{-1} = 0$ . Für  $k \geq 0$  werden nun folgende Parameter definiert:*

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \frac{\langle r_k, p_k \rangle}{\langle p_k, Sp_k \rangle} \\ z_{k+1} &= z_k + \lambda_k p_k \\ r_{k+1} &= r_k - \lambda_k Sp_k \\ p_{k+1} &= Sp_k - \frac{\langle Sp_k, Sp_k \rangle}{\langle p_k, Sp_k \rangle} p_k - \frac{\prod Sp_k Sp_{k-1}}{\langle p_{k-1}, Sp_{k-1} \rangle} p_{k-1}.\end{aligned}$$

Mit  $\sigma = \frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}$  gilt

$$\|z - z_k\|_S \leq \frac{2\sigma^k}{1 + \sigma^{2k}} \|z\|_S,$$

wobei  $\|z\|_S = \|Sz\|^2$ .

*Beweis.* Siehe [8]. □

### 4.4.3 Matching Pursuit

Für den endlich dimensionalen Raum  $\mathbb{C}^N$  stellten Mallat und Zhang diesen Algorithmus bereits 1993 vor, um aus einer vorgegeben Menge von möglichen Lösungskomponenten (= Dictionary) eine möglichst genaue Darstellung eines Vektors mit möglichst wenigen Komponenten ermittelt. Matching Pursuit Algorithmen sind s.g. Greedy Algorithmen, die nach und nach die Elemente der Darstellung suchen (Stichwort Compressed Sensing). Nehmen wir also an, die Frameelemente  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  bilden das Dictionary, und wir wollen einen Vektor  $f \in \mathcal{H}$  mit möglichst wenig Komponenten darstellen. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass  $\|\phi_k\| = 1, \forall k \in \mathbb{N}$ .

Der erste Schritt besteht darin,  $f$  auf einen eindimensionalen Unterraum  $V = \overline{\text{span}}\{\phi_{i_0}\}$  zu projizieren, wobei  $\phi_{i_0}$  ein Element des Frames ist, das wir später näher bestimmen werden. Nachdem wir nur ein Element betrachten, ergibt sich die orthogonale Projektion durch

$$Pf = \langle f, \phi_{i_0} \rangle \phi_{i_0}.$$

Wegen der Orthogonalität der Projektion ergibt sich für das Residuum  $r_0$  mit  $r_0 = f - Pf$

$$\|r_0\|^2 = \|f\|^2 - \|Pf\|^2 = \|f\|^2 - |\langle f, \phi_{i_0} \rangle|^2.$$

Um  $r_0$  möglichst klein zu halten, müssen wir also  $\phi_{i_0}$  so wählen, dass  $|\langle f, \phi_{i_0} \rangle|^2$  möglichst groß wird. Am besten wäre natürlich nach dem Maximum zu suchen, aber manchmal ist es einfacher ein fast optimales Frameelement zu bestimmen, d.h. ein Element für das für eine Relaxationsparameter  $\alpha \in (0, 1]$  gilt:

$$|\langle f, \phi_{i_0} \rangle| \geq \alpha \sup_{j \in \mathbb{N}} |\langle f, \phi_j \rangle|.$$

Die ganze Prozedur wird jetzt mit dem Residuum anstelle von  $f$  wiederholt, d.h. wenn wir annehmen, dass das  $m$ -te Residuum  $r_m$  ermittelt wurde, wird das neue Element  $\phi_{i_{m+1}}$  aus dem Dictionary durch

$$|\langle r_m, \phi_{i_{m+1}} \rangle| \geq \alpha \sup_{j \in \mathbb{N}} \langle r_m, \phi_j \rangle$$

gewählt, wobei wir  $r_0 = f$  setzen. Durch die Projektion von  $r_m$  auf  $\overline{\text{span}}\{\phi_{i_m}\}$  wird dann das nächste Residuum berechnet

$$r_{m+1} = \langle r_m, \phi_{i_m} \rangle \phi_{i_m} - r_m.$$

Durch die Konstruktion ergibt sich

$$f = \langle f, \phi_{i_0} \rangle \phi_{i_0} + r_1 = \langle f, \phi_{i_0} \rangle \phi_{i_0} + \langle f, \phi_{i_1} \rangle \phi_{i_1} + r_2 = \cdots = \sum_{m=0}^{M-1} \langle r_m, \phi_{i_m} \rangle \phi_{i_m} + r_M$$

und wegen der Orthogonalität der Projektionen folgt

$$\|f\|^2 = \left\| \sum_{m=0}^{M-1} \langle r_m, \phi_{i_m} \rangle \phi_{i_m} \right\|^2 + \|r_M\|^2$$

#### 4.4.4 Konvergenz in $\mathbb{C}^N$

Betrachten wir

$$\frac{\|r_{m+1}\|^2}{\|r_m\|^2} = 1 - \left| \left\langle \frac{r_m}{\|r_m\|}, \phi_{i_m} \right\rangle \right|^2 \leq 1 - \mu^2(r_m, \Phi),$$

wobei

$$\mu(r, \Phi) := \max_{j \in \mathbb{N}} \left| \left\langle \frac{r}{\|r\|}, \phi_j \right\rangle \right| \leq 1$$

die Kohärenz des Vektors relativ zum Dictionary/Frame ist. Definieren wir

$$\mu_{\min}(\Phi) := \inf_{r \in \mathbb{C}^N, r \neq 0} \mu(r, \Phi)$$

zeigen wir im nächsten Satz, dass  $\mu_{\min}(\Phi) > 0$ , und damit ergibt sich die Konvergenz des Matching Pursuit durch

$$\|r_{m+1}\|^2 \leq (1 - \mu_{\min}^2(\Phi)) \|r_m\|^2 \leq \cdots \leq (1 - \mu_{\min}^2(\Phi))^{m+1} \|f\|^2.$$

**Theorem 4.4.3.** *Das Residuum  $r_m$ , das mit Hilfe des Matching Pursuit mit Relaxationsparameter  $\alpha \in (0, 1]$  ermittelt wurde, erfüllt*

$$\|r_m\|^2 \leq (1 - \alpha^2 \mu_{\min}^2(\Phi))^m \|f\|^2$$

mit

$$0 < \mu_{\min}(\Phi) \leq 1.$$

*Beweis.* Die Abschätzung bzgl. des Residuums wurde bereits oben beschrieben. Um zu zeigen, dass  $\mu_{\min} \Phi > 0$ , nehmen wir das Gegenteil an, d.h. es existiert ein Folge  $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$  mit

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathbb{N}} |\langle f_m, \phi_j \rangle| = 0.$$

In  $\mathbb{C}^N$  ist die Einheitskugel kompakt, d.h. es existiert eine Teilfolge in  $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ , die gegen einen Einheitsvektor  $f \in \mathbb{C}^N$  konvergiert.

Daraus folgt aber

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} |\langle f, \phi_j \rangle| = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathbb{N}} |\langle f_{m_k}, \phi_j \rangle| = 0$$

und weil  $\Phi$  ein Frame ist, dass  $f = 0$ . Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass  $f$  auf der Einheitskugel liegt.  $\square$

Mallat konnte auch zeigen, dass der Matching Pursuit Algorithmus auch für unendlichdimensionale Hilberträume und vollständige Dictionaries konvergiert, jedoch ist diese Konvergenz nicht mehr exponentiell.

In der Praxis kann es sein, dass die Konvergenz nur sehr langsam ist, bzw. dass durch Rechenfehler die Konvergenz überhaupt nicht eintritt, des gibt aber etliche Varianten der Matching Pursuit Idee, die sich mit solchen Problemen beschäftigen.

## 4.5 Anwendung von Frames: Rauschunterdrückung

Die Redundanz eines Frames kann ausgenutzt werden, um Rauschen in der Darstellung eines Signals zu unterdrücken. Wenn wir uns von der theoretischen Welt der Mathematik in Richtung Realität bewegen, machen wir einige Fehler auf dem Weg zwischen Theorie und Realität, z.B.

- Quantization Fehler, die entstehen, weil Zahlen nur mit einer gewissen Genauigkeit dargestellt werden können,
- Truncation Fehler, die entstehen, weil die unendliche Summe der Framedarstellung früher oder später abgebrochen werden muss,
- Übertragungsfehler, die entstehen, wenn Signale über verschiedene Stationen verschickt werden, Stichwort "Stille Post",
- Fehler, die durch fehlerhafte Mikrophone entstehen, ....

Nehmen wir einmal an, dass das Rauschen  $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ , dann wird aus einem Signal die Approximation ( $\Psi$  ist der kanonische duale Frame)

$$f \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\langle f, \psi_k \rangle + w_k) \phi_k = f + \sum_{k=1}^{\infty} w_k \phi_k.$$

Wie schon oben, können wir praktisch nur eine endliche Anzahl von Frameelementen verwenden, was aber auch bedeutet, dass wir nicht wirklich den ganzen  $\ell^2(\mathbb{N})$  als Koeffizientenraum für den Syntheseoperator zur Verfügung haben, sondern eine Projektion von  $\ell^2 \rightarrow \mathcal{R}(T_{\Phi}^*)$ . Nachdem die Empfängerseite weiß, dass das empfangene Signal mittels eines Frames generiert wurde, macht es Sinn, das Rauschen im Signal mittels einer Projektion  $Q : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{R}(T_{\Phi}^*)$  zu kompensieren, wobei  $\mathcal{R}(T_{\Phi}^*)$  der Wertebereich von  $T_{\Phi}^*$  ist,

$$Q\{\langle f, \psi_k \rangle + w_k\} = \{\langle f, \psi \rangle\} + Q\{w_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

wobei  $(Qw)_k = \left\langle \sum_j w_j \psi_j, \phi_k \right\rangle$ .

**Theorem 4.5.1** (Reproduzierender Kern). *Sei  $\Phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein Frame für einen Unterraum  $V \subseteq \mathcal{H}$  (oder auch für den Hilbertraum  $\mathcal{H}$  selbst). Dann ist die orthogonale Projektion von  $\ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{R}(T^*)$  durch*

$$Q\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = T^*T^{\dagger}\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle \psi_n, \phi_k \rangle \right\}_{k=1}^{\infty}$$

gegeben, wobei  $T^{\dagger} = (TT^*)^{-1}T$  wieder die Pseudoinverse von oben und  $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  der kanonische Dualframe sind.

Die Koeffizienten  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N})$  sind genau dann Framekoeffizienten  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{R}(T^*)$ , wenn sie die reproduzierende Kern Gleichung

$$c_n = T^*T^\dagger c_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle \psi_k, \phi_n \rangle$$

erfüllen.

*Beweis.* Für  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{R}(T^*)$  existiert ein  $f$  mit  $T^*f = \{c_k\}_{k=1}^\infty$  und es gilt

$$Q\{c_k\}_{k=1}^\infty = T^*T^\dagger T^*f = T^*(TT^*)^{-1}TT^*f = T^*f = \{c_k\}_{k=1}^\infty$$

Für  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in (\mathcal{R}(T^*))^\perp = \mathcal{N}(T)$  gilt

$$Q\{c_k\}_{k=1}^\infty = T^*T^\dagger\{c_k\}_{k=1}^\infty = T^*(TT^*)^{-1}T\{c_k\}_{k=1}^\infty = 0.$$

Ist nun  $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{R}(T^*)$  gilt

$$T^*T^\dagger\{c_k\}_{k=1}^\infty = T^*(TT^*)^{-1}TT^*f = T^*f = \{c_k\}_{k=1}^\infty.$$

Umgekehrt gilt

$$\{c_k\}_{k=1}^\infty = T^*T^\dagger\{c_k\}_{k=1}^\infty = T^*S^{-1}T\{c_k\}_{k=1}^\infty = T^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k S^{-1}\phi_k\right) = T^*f.$$

□

**Bemerkung:** Aber Vorsicht bei der Notation. Hier betrachten wir eine Framefolge für  $\mathcal{H}$ , also einen Frame für eine Unterraum.

Zurück zur Rauschunterdrückung. Eine oft gemachte Annahme bezüglich des Rauschens, ist die Annahme eines *weißen* Rauschens, d.h. die  $w_k$  sind unabhängige Zufallsvariablen mit Mittelwert 0 und Varianz  $\sigma^2$ , d.h.

$$\mathbb{E}w_k = 0, \quad \mathbb{E}(w_k w_\ell) = \sigma^2 \delta_{k,\ell}, \quad \forall k, \ell \in \mathbb{N}.$$

Wie schon oben, soll der Effekt vom Rauschen möglichst gering gehalten werden. Im Falle des kanonischen Dualframes  $\psi_k = S^{-1}\phi_k$  können wir folgende Aussage treffen:

**Theorem 4.5.2.** Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein normalisierter Frame mit unterer Schranke  $A$ . Für weißes Rauschen  $\mathbf{w} := \{w_k\}_{k=1}^\infty$  gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}|(Qw)_k|^2 \leq \frac{\sigma^2}{A}.$$

Sollte  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  ein tight Frame sein, gilt Gleichheit.

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|(Qw)_k|^2 &= \mathbb{E}\left((Qw)_k \overline{(Qw)_k}\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{\infty} w_j \langle \psi_j, \phi_k \rangle \overline{\sum_{\ell=1}^{\infty} w_\ell \langle \psi_\ell, \phi_k \rangle}\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{E}(w_j w_\ell) \langle \psi_j, \phi_k \rangle \overline{\langle \psi_\ell, \phi_k \rangle} = \\ &= \sigma^2 \sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle \psi_\ell, \phi_k \rangle|^2 \leq \frac{\sigma^2}{A} \|\phi_k\|^2 = \frac{\sigma^2}{A}. \end{aligned}$$

Für einen tight Frame ist  $S^{-1}$  ein Vielfaches der Identität  $I$  und die obige Ungleichung wird zur Gleichung. □

### 4.5.1 Oversampling

In Abschnitt 3.3.5 haben wir gezeigt, dass bandbeschränkte Signale mit Hilfe von sinc Funktionen dargestellt werden können. Betrachten wir zum Beispiel den Paley-Wiener Raum  $PW$  mit

$$PW := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp } \hat{f} \subseteq [-1/2, 1/2] \right\}$$

dann besagt Shannon's Sampling Theorem, dass  $\text{sinc}(\cdot - k)_{k \in \mathbb{Z}}$  eine orthonormale Basis von  $PW$  ist, und dass

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \text{sinc}(t - k), \quad f(k) = \langle f, \text{sinc}(\cdot - k) \rangle.$$

wobei

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{für } t \neq 0, \\ 1 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Dass  $\text{sinc} \in PW$  ist klar, weil die Fouriertransformation von  $\text{sinc}$  die Rechteckfunktion ist.

Die Idee hinter Oversampling ist nun, dass durch das Abtasten bei  $\{k/M\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $M \in \mathbb{N}$ ,  $M > 1$  das Rauschen unterdrückt werden kann. Betrachten wir zunächst die Funktionen  $\text{sinc}(t - k - m/M)$  für ein fixes  $m \in \{0, \dots, M-1\}$ . Weil  $\text{sinc}(t - k)$  in  $PW$  orthonormal ist, gilt das auch für dieses System. Das bedeutet, dass wir eine endliche Familie von orthonormalen Basen haben, deren Vereinigung

$$\bigcup_{m=0}^{M-1} \{\text{sinc}(t - k - m/M)\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{\text{sinc}(t - k/M)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

eine tight Frame mit Frameschranke  $A = M$  ergibt. Für jedes  $f \in PW$  gilt dann:

$$f(t) = \frac{1}{M} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \text{sinc}(\cdot - k/M) \rangle \text{sinc}(t - k/M).$$

Weil aber  $\{\text{sinc}(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  eine orthonormale Basis bilden, gilt

$$\begin{aligned} \langle f, \text{sinc}(\cdot - k/M) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sinc}(t - k/M) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{T}_{-k/M} f(t)) \text{sinc}(t) dt = \\ &= (\mathcal{T}_{-k/M} f)(0) = f(k/M), \end{aligned}$$

wobei der Translationsoperator durch  $\mathcal{T}_k(f) := f(t - k)$  definiert ist. Damit ergibt sich

$$f(t) = \frac{1}{M} f(k/M) \text{sinc}(t - k/M).$$

Im obigen Abschnitt konnte gezeigt werden, dass die Energie vom Fehler

$$\mathbb{E}|(Qw)_k|^2 \leq \frac{\sigma^2}{A} = \frac{\sigma^2}{M},$$

d.h. je größer  $M$ , umso kleiner die Energie des Rauschens.



# Kapitel 5

## Gabor Frames

### 5.1 Motivation

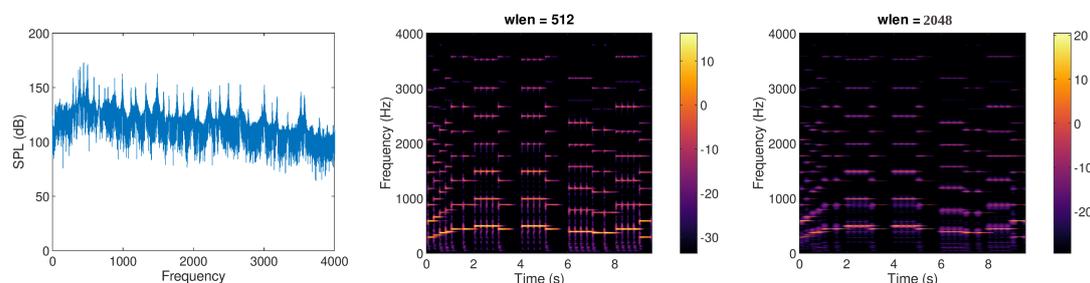


Abbildung 5.1: Spektrum und zwei Spektrogramme mit verschiedenen Fensterlängen zu den ersten paar Takten von alle meine Entlein.

In der Akustik ist die Fouriertransformation ein wichtiges Werkzeug, um die Frequenzkomponenten eines Signals zu bestimmen. Sie hat unter anderem aber einen großen Nachteil. Das Signal sollte bereits über den ganzen Zeitbereich bekannt sein, und aus dem Spektrum des Signal ist nicht ersichtlich, *wann* eine Frequenzkomponente auftritt, sondern nur, *dass* sie auftritt. Ein Weg von einer reinen Frequenzdarstellung zu einer *Zeit-Frequenz*-Darstellung zu kommen, ist die Kurzzeitfouriertransformation (STFT). Die Idee hinter der STFT ist relativ einfach und lässt sich am Besten mit dem Begriff “Fensterung” beschreiben. Anstatt das ganze Signal zu betrachten, wird nur ein kleiner Abschnitt (= gefensterter Signal) betrachtet, d.h. das Signal wird mit einem Fenster von endlicher Länge multipliziert. Das gefensterter Signal wird nun fouriertransformiert, und wir erhalten damit eine vertikale Linie im Spektrogramm, das den Absolutwert der Fourierkoeffizienten, bzw. das Quadrat davon farblich darstellt. Dann wird das Fenster ein wenig im Zeitbereich verschoben und die ganze Prozedur wiederholt.

**Definition 5.1.1** (Kurzzeitfouriertransformation). *Für ein gegebenes Signal  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  ergibt sich seine Kurzzeitfouriertransformation aus*

$$STFT_g(f)(\tau, \nu) = c_f(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - \tau)e^{-2\pi i \nu t} dt, \quad (5.1)$$

wobei  $g(t) \in L^2(\mathbb{R})$  als Fensterfunktion bezeichnet wird. Umgekehrt gilt

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_f(\tau, \nu) e^{2\pi i \nu x} g(x - \tau) d\nu d\tau.$$

In der Praxis gibt es dabei einige Dinge zu betrachten:

- Eigentlich wäre eine Box Funktion ein naheliegendes Fenster, aber ein scharfes Abschneiden einer Funktion ist nicht immer eine gute Idee, weil an den Schnittstellen in der Regel Unstetigkeiten auftreten. Die Fouriertransformation der Box/Rechteckfunktion ist die sinc Funktion, die nur sehr langsam abfällt. Aus diesem Grund sollten für die STFT glatte Fenster (z.B. Hanning oder Hann) verwendet werden, deren Fourierkoeffizienten auch schneller abfallen. Ein Beispiel für zwei verschiedene Fenster und deren Fouriertransformierten ist in Abb. 5.2 gegeben.

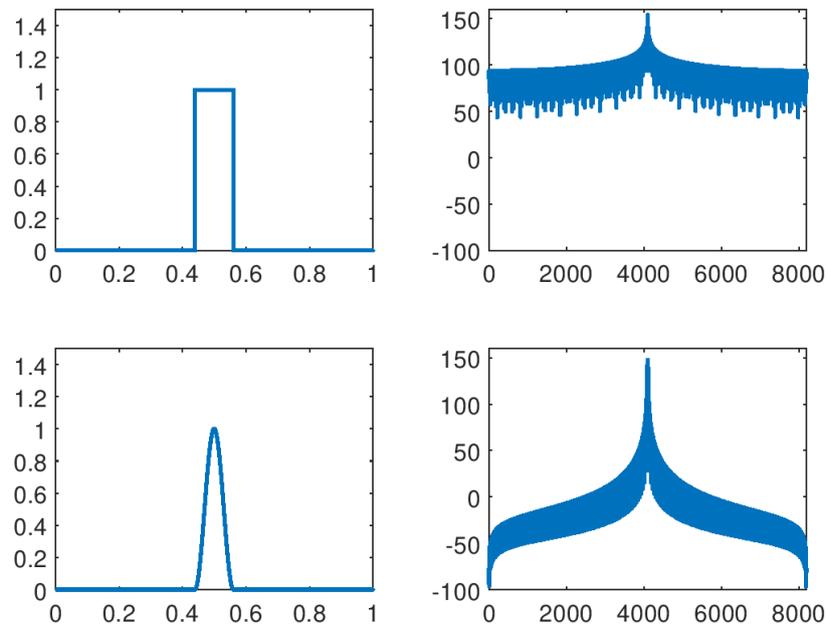


Abbildung 5.2: Ein Rechteckfenster und ein Hanningfenster auf der linken Seite, deren Fouriertransformation auf der rechten.

- Die schon oben erwähnte Unschärfe in Verbindung mit der Fouriertransformation spielt bei Spektrogrammen eine große Rolle. Lange Fenster bedeuten eine gute Frequenzauflösung, kurze Fenster hingegen eine gute Zeitauflösung (siehe auch Abb. 5.3).
- Die Überschneidung der Fenster bestimmt im Prinzip die Glattheit des Spektrogramms und wie wir später sehen werden, auch in gewisser Weise die Stabilität der Darstellung.

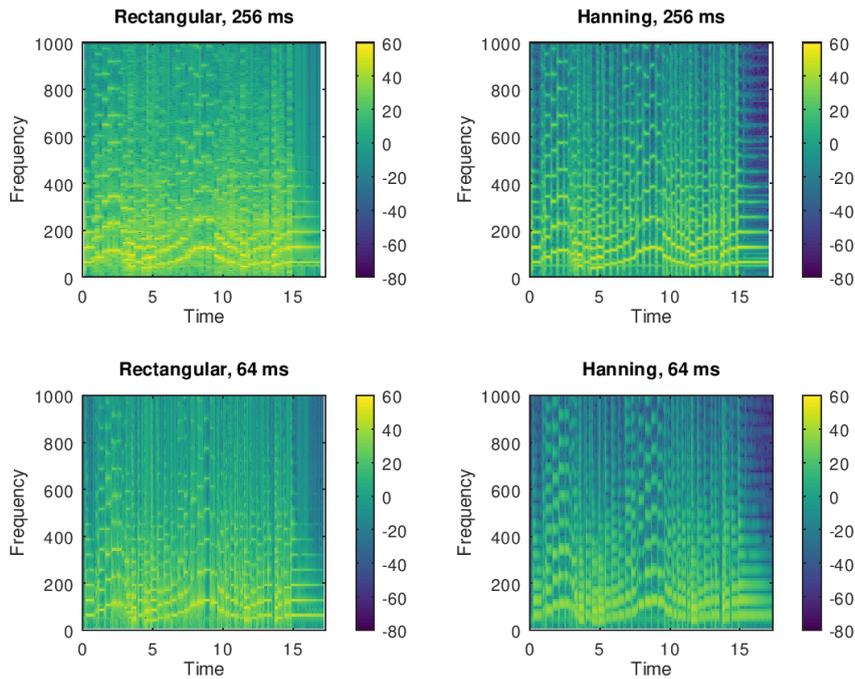


Abbildung 5.3: Spektrogramm eines Signals mit Rechteckfenster (links) und Hanningfenster (rechts) mit verschiedenen Fensterlängen.

Wenn wir die Fouriertransformation betrachten, stellen wir im praktischen Fall eine Funktion durch eine Linearkombination mit einer Basis  $e^{2\pi i n x}$ , bzw.  $e^{2\pi i n m/N}$  dar. Die STFT kann auf ähnliche Weise interpretiert werden. Das Integral in Gl. (5.1) kann als  $L^2$ -Multiplikation von  $f(x)$  mit der Funktion  $g_{\tau,\nu}(x) = g(x - \tau)e^{-2\pi i \nu x} = \mathcal{E}_\nu \mathcal{T}_\tau g$  interpretiert werden. Die beiden Operatoren  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{T}$  bezeichnen hier den Modulations-, bzw. Translationsoperator. In der Signalverarbeitung gibt es drei Arten von Operatoren, die sehr häufig verwendet werden:

**Translationsoperatoren:**  $\mathcal{T}_a : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) : f(x) \rightarrow f(x - a), a \in \mathbb{R}$ .

**Modulationsoperatoren:**  $\mathcal{E}_b : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) : f(x) \rightarrow e^{2\pi i b x} f(x), b \in \mathbb{R}$ .

**Dilationsoperatoren:**  $\mathcal{D}_\gamma : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) : f(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\gamma}} f\left(\frac{x}{\gamma}\right), \gamma \in \mathbb{R}^+$ .

Translation und Modulation sind über die Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  eng verbunden, so ist

$$\mathcal{F}(\mathcal{T}_a f)(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a) e^{-2\pi i \nu x} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \nu (x+a)} dt = \mathcal{E}_{-a} \mathcal{F}(f)(\nu).$$

Es stellen sich natürlich die Fragen “Welche Eigenschaften sollte das Fenster  $g_{\tau,\nu}$  (bzw. sein diskreter Zwillings) besitzen?” oder “Wenn die Koeffizienten der STFT bekannt sind, kann das ursprüngliche Signal wieder hergestellt werden?”. Gabor Analyse versucht auf diese Fragen eine Antwort zu geben.

Gabor Analyse beschäftigt sich der Darstellung von Funktionen durch Zusammensetzung von verschobenen und modulierten Versionen eine vorgegebenen *Fensterfunktion*

$g(x)$  (siehe Gl. 5.1). Neben der kontinuierlichen Version können die Translationen und Modulation auf eine beschränkte Untermenge  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  beschränkt werden.

### 5.1.1 Eine Anwendung: MULACLAB

Wenn wir normalerweise von Filter sprechen, meinen wir zeit-invariante Filter, d.h. der Frequenzbereich des Filters ändert sich *nicht* über die Zeit. Manchmal ist es aber notwendig spezielle Teile aus einem Signal zu schneiden, die sich über die Zeit verändern, zum Beispiel die Vorbeifahrt eines Zugs oder einer Ambulanz, bei der der Dopplereffekt die Frequenz ändert, oder wie im Beispiel in Abb. 5.4 ein Theremin aus einem Musikstück. Wird das Spektrogramm des Signals mit Hilfe der Kurzzeitfourier-Transformation mit ei-

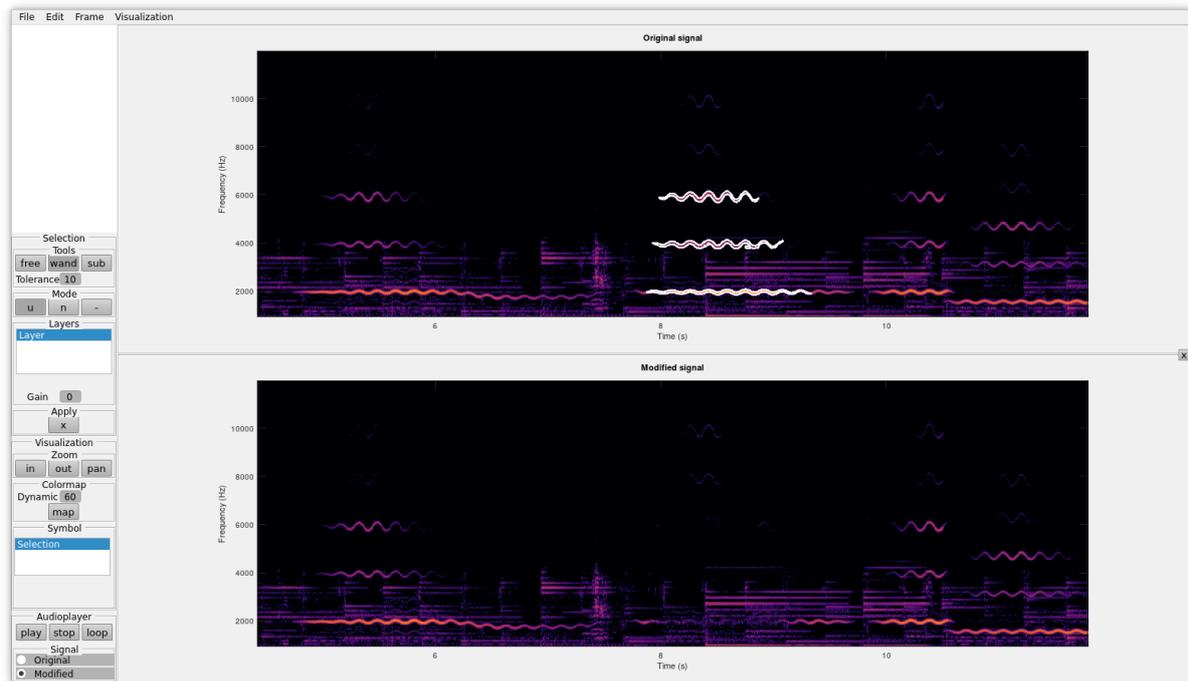


Abbildung 5.4: Screenshot von MULACLAB: Ausschnitt eines Spektrogramms eines Musikstücks (Amiina, “Rugla”), aus dem ein Teil des Theremins entfernt wurde.

nem Gaußfenster generiert, repräsentiert jeder Farbpunkt im Spektrogramm den Betrag eines Gaborframe Koeffizienten, wir können also im Spektrogramm mit graphischen Werkzeugen Fourierkoeffizienten auswählen, die wir dann manipulieren können, zum Beispiel auf 0 setzen. Die Theorie dahinter, bilden s.g. Framemultiplier (cf. [2]), was im Prinzip nichts anderes bedeutet, als dass ein Signal mittels eines Frames zerlegt wird, die Koeffizienten der Zerlegung manipuliert werden, und dann das (manipulierte) Signal mit Hilfe des dualen Frames wieder zusammengesetzt wird. In der frei verfügbaren Matlab/Octave Toolbox LTFAT (<https://lftfat.org>) gibt es dazu das Tool MULACLAB, mit dessen Hilfe Regionen im Spektrogramm markiert und manipuliert werden können.

## 5.2 Gaborframes

**Definition 5.2.1** (Gaborsystem). *Eine Familie  $\mathcal{G}(g, a, b)$  von Funktion der Form*

$$\{\mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}} = \{e^{2\pi imbx}g(x - na)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$$

wird Gabor System genannt.

Wenn wir zurück auf die STFT schauen, können wir sozusagen den Parameter  $a$  als Zeitschrittweite und den Parameter  $b$  als Frequenzschrittweite interpretieren. In der Regel ergeben sich die Koeffizienten einer Framedarstellung immer durch  $\langle f, g_{mn} \rangle$ , also macht eine positive Modulation Sinn, weil durch das innere Produkt das Vorzeichen der Modulation umgedreht wird, und wir dann wieder bei der Fouriertransformation landen.

**Definition 5.2.2** (Gaborframe). *Ein Gaborframe ist ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  der Form*

$$\{\mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}} = \{e^{2\pi imbx}g(x - na)\}_{m,n \in \mathbb{Z}},$$

wobei  $a, b > 0$  und  $g(x)$  vorgegebene Parameter, bzw. Fensterfunktionen sind. Gabor Frames werden in der Literatur auch oft als Weyl-Heisenberg Frames bezeichnet.

Wenn wir Systeme  $\{\mathcal{T}_{kb}g\}_{k \in \mathbb{Z}}$  betrachten, können wir die Eigenschaften der Dilation nutzen, und um die Schreibweise zu verkürzen, einfach einmal annehmen, dass  $b = 1$ . Nachdem  $\mathcal{D}$  ein unitärer Operator ist und  $\mathcal{D}_\gamma\mathcal{T}_{kb} = \mathcal{T}_{kb/\gamma}\mathcal{D}_\gamma$ , gilt

**Lemma 5.2.3.** *Sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $a, b > 0$ .  $\{\mathcal{T}_{kb}g\}_{k \in \mathbb{Z}}$  ist genau dann eine Framefolge/Frame, wenn  $\{\mathcal{T}_{kb/\gamma}\mathcal{D}_\gamma g\}_{k \in \mathbb{Z}}$  eine Framefolge/Frame ist. In diesem Fall haben beide die selben Frameschranken.*

Angenommen  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - ka)$  konvergiert<sup>1</sup>, dann ist diese Summe im Prinzip eine Periodisierung von  $g(x)$ . Diese Periodisierung werden wir in diesem Kapitel noch öfter antreffen. Einen Zusammenhang zwischen Fenster und periodischen Funktionen erklärt die Notwendigkeit einiger allgemeinen Lemmata, auf die spätere Beweise rund um Gaborframes aufbauen:

**Lemma 5.2.4.** *Seien  $a > 0$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine beschränkte, messbare und periodische Funktion mit Periode  $a$ . Ist  $g \in L^1(\mathbb{R})$  gilt:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \int_0^a f(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - ka)dx$$

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass die obige Bedingung für den Betrag konvergiert (d.h. wir haben absolute Konvergenz), woraus der Rest folgt. Betrachten wir also

$$\begin{aligned} \int_0^a |f(x)| \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g(x - ka)|dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^a |f(x)||g(x - ka)|dx = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^a |f(x - ka)||g(x - ka)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)g(x)|dx. \end{aligned}$$

$f$  ist beschränkte,  $g$  ist in  $L^1(\mathbb{R})$ , somit konvergiert die obige Summe. Damit dürfen wir aber auch Summe und Integral im "originalen" Problem vertauschen.  $\square$

Der Beweis zeigt übrigens auch, dass in diesem Fall auch  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - ka)$  konvergiert, und wenn wir die Idee weiter verfolgen auch, dass

<sup>1</sup>Was zum Beispiel bei Funktionen mit Träger in einem endlichen Intervall oder schnell abfallenden Funktionen der Fall ist.

**Lemma 5.2.5.** *Seien  $a > 0$  und  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann ist die Reihe  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - ka)g(x - ka)$  fast überall absolut konvergent und*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \int_0^a \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - ka)g(x - ka)dx.$$

*Beweis.* Weil  $g, f \in L^2(\mathbb{R})$  folgt, dass  $fg \in L^1(\mathbb{R})$  (z.B. wg. Cauchy-Schwarz). Damit folgt mit obigen Lemma, dass

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(x - ka)g(x - ka)| < \infty$$

weil wir Limes und Integral vertauschen dürfen:

$$\int_0^a \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(x - ka)g(x - ka)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^a |f(x - ka)g(x - ka)| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)g(x)| < \infty$$

Weil die Summe absolut konvergiert, dürfen Limes und Integral auch für die ursprüngliche Summe vertauscht werden.  $\square$

### 5.3 Fensterfunktion

Blicken wir zunächst einmal auf das Fenster  $g(x)$ . Eine *notwendige* Bedingung, damit  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Frame ist, ist wie gut die verschobenen Versionen von  $g(x)$  die reellen Zahlen überdecken. Definieren wir die Funktion  $G(x)$  als

$$G(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(x - na)|^2, x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

**Theorem 5.3.1.** *Sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$  eine fixe Fensterfunktion und  $a, b > 0$ . Ist das System  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Frame mit Frameschranken  $A$  und  $B$ , so gilt:*

$$bA \leq G(x) \leq bB$$

*fast überall in  $\mathbb{R}$ . Um präziser zu sein; Ist die rechte Ungleichung nicht erfüllt, kann  $\mathcal{G}(g, a, b)$  keine Besselfolge sein, wird die linke Ungleichung nicht erfüllt, kann die untere Framebedingung nicht erfüllt sein.*

*Beweis.* Betrachten wir zuerst einmal die rechte Ungleichung. Wir nutzen einen indirekten Beweis, d.h. wir nehmen an, dass es ein messbare Menge  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$  gibt, für die

$$G(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(x - na)|^2 > bB, x \in \Delta$$

gilt.

Wir können annehmen, dass  $\Delta$  in einem Intervall  $I$  der Länge  $|I| = b$  enthalten ist<sup>2</sup>. Wir können  $\Delta$  als disjunkte Vereinigung von

$$\begin{aligned}\Delta_0 &:= \{x \in \Delta : G(x) \geq 1 + bB\}, \\ \Delta_k &:= \{x \in \Delta : \frac{1}{k+1} + bB \leq G(x) < \frac{1}{k} + bB\}, k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

darstellen. Nachdem das Maß von  $\Delta$  nicht null ist, gibt es zumindest ein  $\Delta_{k'}$  mit positivem Maß. Auf dieser Menge betrachten wir die charakteristische Funktion  $\chi_{\Delta_{k'}}$

$$\chi_{\Delta_{k'}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \Delta_{k'} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei  $g_{mn} := \mathcal{E}_{mb} \mathcal{T}_{na}(g)$  und betrachten wir die Framekoeffizienten der Darstellung von  $\chi_{\Delta_{k'}}$ :

$$\begin{aligned}\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle \chi_{\Delta_{k'}}, g_{mn} \rangle|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\langle \chi_{\Delta_{k'}}, g_{mn} \rangle|^2 = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\langle \chi_{\Delta_{k'}} \overline{\mathcal{T}_{na}g}, \mathcal{E}_{mb} \rangle|^2 = \\ &= \frac{1}{b} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{\Delta_{k'}}|^2 |g(x - na)|^2 dx\end{aligned}$$

Die letzte Zeile gilt, weil  $\text{supp} \chi_{\Delta_{k'}} \subset I$  und  $\{\sqrt{b} \mathcal{E}_{mb}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  eine Orthonormalbasis für  $L^2(I)$  ist (Stichwort Fourierreihe), und somit die Energie der Koeffizienten einer Darstellung mit Hilfe der Basis gleich der Energie der Funktion ist. Also gilt

$$\begin{aligned}\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle \chi_{\Delta_{k'}}, g_{mn} \rangle|^2 &= \frac{1}{b} \int_{\Delta_{k'}} G(x) dx \geq \\ &\geq \frac{1}{b} \left( \frac{1}{k'+1} + bB \right) \int_{\Delta_{k'}} dx = \\ &= \frac{1}{b} \left( \frac{1}{k'+1} + bB \right) \|\chi_{\Delta_{k'}}\|^2 = \\ &= \left( B + \frac{1}{b(k'+1)} \right) \|\chi_{\Delta_{k'}}\|^2,\end{aligned}$$

was aber nicht sein kann, weil  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ja ein Frame ist und somit die obere Framebedingung erfüllen muss. Das heißt  $\Delta$  ist eine Nullmenge.

Für die untere Framebedingung können wir ähnlich wie für die obere Bedingung vorgehen, z.B.

$$\Delta_k = \left\{ x : bA - \frac{1}{k+1} \leq G(x) < bA - \frac{1}{k} \right\}.$$

□

Wie schon erwähnt, es ist nur eine *notwendige* Bedingung, dass das Fenster zumindest beschränkt sein muss, und die verschobenen Versionen die reellen Zahlen "gut" überdecken muss. Die umgekehrte Richtung ist weniger einfach, die Beweise für die Theoreme zu diesem Thema sind oft sehr lang und sehr technisch. Deshalb, werden sie hier nicht angeführt. Viele der Beweise beruhen darauf, dass Gaborframes im Prinzip translationsinvariante Systeme sind.

<sup>2</sup>Entweder wird  $\Delta$  abgeschnitten oder dementsprechend aufgefüllt.

### 5.3.1 Translationsinvariante Systeme

Gabor Frames sind ein Spezialfall von translationsinvarianten Systemen. Ein translationsinvariantes System ist eine abzählbare Familie von Funktionen  $\{g_m\}_{m \in I}$  mit einem Translationsparameter  $a > 0$  in  $L^2(\mathbb{R})$  (um die Notation zu vereinfachen, wird  $I = \mathbb{Z}$  gesetzt):

$$\{g_{mn}\} := \{\mathcal{T}_{na}g_m\}_{m,n \in \mathbb{Z}}.$$

Wählen wir für die Funktion

$$g_m = e^{2\pi imbx} g(x) = \mathcal{E}_{mb}g(x),$$

können wir ein Gaborsystem bis auf einen Phasenfaktor als translationsinvariantes System schreiben:

$$\mathcal{G}(g, a, b) = e^{-2\pi imnab} \mathcal{T}_{na} \mathcal{E}_{mb} g(x),$$

und damit auf die Theorie, die für diese Systeme entwickelt wurde, benutzen.

Außerdem gibt es bei Gaborframe eine Verbindung zwischen Frequenz- und Zeitbereich. Nehmen wir einmal an, dass  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Gaborframe ist. Dann gilt für ein  $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$|\langle f, g_{mn} \rangle| = \left| \langle \hat{f}, \widehat{g_{mn}} \rangle \right|,$$

wobei  $\hat{f}$  die Fouriertransformierte von  $f$  bezeichnet. Weil

$$\begin{aligned} \widehat{g_{mn}} &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x - na) e^{2\pi imbx} e^{-2\pi i\nu x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi i(\nu - mb)(x + na)} dx = \\ &= e^{2\pi imnab} e^{-2\pi i\nu na} \hat{g}(\nu - mb) = e^{2\pi imnab} \mathcal{E}_{-na} \mathcal{T}_{mb} \hat{g}, \end{aligned}$$

gilt, dass  $\mathcal{G}(g, a, b)$  genau dann ein Frame ist, wenn  $\mathcal{G}(\hat{g}, b, -a)$  ebenfalls ein Frame ist.

Das bedeutet, es können sowohl für  $g$  als auch  $\hat{g}$  Bedingungen und Kriterien gefunden werden, unter denen eine Gaborsystem ein Frame ist.

### 5.3.2 Bedingung im Frequenzbereich

In Kriterien an das Fenster für translationsinvariante Frames  $\{g_{mn}\} := \{\mathcal{T}_{na}g_m\}$  herzuleiten, wird die Matrix-Funktion

$$H_g(\nu) := (\widehat{g}_m(\nu - k/a))_{k,m \in \mathbb{Z}} = (\hat{g}(\nu - mb - k/a))_{k,m \in \mathbb{Z}}, \quad (5.2)$$

und deren Eigenschaften betrachtet. Auf den ersten Blick ist es ein wenig unerwartet, wieso plötzlich die Fourier-Transformierte  $\hat{g}$  des Fensters  $g$  auftaucht. Das nächste Lemma, das für allgemeine translationsinvariante System gilt, soll zumindest eine Motivation für diese Tatsache liefern. Das Lemma wird für Funktionen  $f \in \mathcal{S}$  betrachtet, deren Fouriertransformierte  $\hat{f}$  zusätzlich noch kompakten Träger besitzt. Die Schwartz-Klasse  $\mathcal{S}$  ist der Raum aller Funktionen, die exponentiell schnell abfallen, und die unendlich oft differenzierbar sind. Dieser Raum kommt im Zusammenhang mit der Fouriertransformation oft vor, er erlaubt es uns zum Beispiel die Fouriertransformation von Funktionen zu definieren, die nicht im  $L^2(\mathbb{R})$  liegen, z.B.  $\sin(x)$  oder  $\cos(x)$ . Die Einschränkung auf diesen Funktionenraum ist ein technisches Hilfsmittel, weil der Raum der bandbeschränkten Funktionen aus der Schwartz-Klasse dicht im  $L^2(\mathbb{R})$  liegt, kann das Lemma durch Dichtheitsargumente auf  $L^2(\mathbb{R})$  ausgeweitet werden.

**Lemma 5.3.2.** Sei  $\{g_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{Z}} = \{g_m(x - na)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  ein translationsinvariantes System in  $L^2(\mathbb{R})$ , und sei

$$H_g(\nu) = (\widehat{g}_m(\nu - k/a))_{k,m \in \mathbb{Z}} \text{ für fast alle } \nu \in \mathbb{R}$$

ein beschränkter Operator auf  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Dann gilt für jedes Intervall  $I$  der Länge  $1/a$  und für jede bandbeschränkte Funktion  $f \in \mathcal{S}$ :

$$\int_I \|H_g^*(\nu) \{\hat{f}(\nu - k/a)\}_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2}^2 d\nu = a \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{mn} \rangle|^2.$$

*Beweis.* Für die  $\nu \in \mathbb{R}$ , für die  $H_g(\nu)$  beschränkt ist, ist auch  $H_g^*(\nu)$  beschränkt. Per Definition ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_I \|H_g^*(\nu) \{\hat{f}(\nu - k/a)\}_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2}^2 d\nu &= \int_I \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}_m^*(\nu - k/a) \hat{f}(\nu - k/a) \right|^2 d\nu = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_I \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}_m^*(\nu - k/a) \hat{f}(\nu - k/a) \right|^2 d\nu. \end{aligned}$$

Betrachten wir für jedes  $m \in \mathbb{Z}$  die Funktion

$$h(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}_m^*(\nu - k/a) \hat{f}(\nu - k/a).$$

Weil  $H_g^*(\nu)$  ein beschränkter Operator ist und  $f$  bandbeschränkt ist, konvergiert die obige Summe sogar absolut.

$h(\nu)$  ist also wohldefiniert und periodisch mit Periodenlänge  $1/a$ . Betrachten wir den Fourierkoeffizienten von  $h(\nu)$  so gilt:

$$\begin{aligned} a \int_I h(\nu) e^{-2\pi i a n \nu} d\nu &= a \int_I \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}_m^*(\nu - k/a) \hat{f}(\nu - k/a) e^{-2\pi i a n \nu} d\nu = \\ &= a \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_I \widehat{g}_m^*(\nu - k/a) \hat{f}(\nu - k/a) e^{-2\pi i a n (\nu - k/a)} d\nu = \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}_m^*(\nu) \hat{f}(\nu) e^{-2\pi i a n \nu} d\nu = \\ &= a \mathcal{F} \left( \widehat{g}_m^* \hat{f} \right) (na) = a \mathcal{F}^{-1} \left( \widehat{g}_m^* \hat{f} \right) (-na) = \\ &= a \left( \mathcal{F}^{-1} \widehat{g}_m^* * \mathcal{F}^{-1} \hat{f} \right) (-na) = \\ &= a (g_m^*(\cdot) * f(\cdot))(-na) = a \int_{-\infty}^{\infty} g_m^*(na + x) f(x) dx = a \langle f, \mathcal{T}_{-na} g_m \rangle. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Parseval's Gleichung ergibt sich jetzt

$$a \int_I \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}_m^*(\nu - k/a) \hat{f}(\nu - k/a) \right|^2 d\nu = a^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \mathcal{T}_{-na} g_m \rangle|^2 = a^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \mathcal{T}_{na} g_m \rangle|^2,$$

womit

$$\begin{aligned} a \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{mn} \rangle|^2 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_I \left| \widehat{g}_m^*(\nu - k/a) \hat{f}(\nu - k/a) \right|^2 d\nu = \\ &= \int_I \|H_g^*(\nu) \{\hat{f}(\nu - k/a)\}_{k \in \mathbb{Z}}\|^2 d\nu. \end{aligned}$$

□

Gehen wir also wieder zurück zum Operator  $H_g(\nu)$ , der in Gl. (5.2) definiert wurde. Betrachten wir die Fouriertransformation des Fenster  $g$ , gilt für Gaborssysteme

$$\widehat{g}_m(\nu) = \mathcal{F}(\mathcal{E}_{mb}g) = \hat{g}(\nu - mb).$$

Wenn  $H_g(\nu)$  ein beschränkter Operator auf  $\ell^2(\mathbb{Z})$  ist, dann gibt es ebenfalls für den adjungierten Operator

$$H_g^*(\nu) = \left( \overline{\hat{g}(\nu - mb - k/a)} \right)_{m,k \in \mathbb{Z}}.$$

Mit Hilfe der “Matrizen”  $H_g$  und  $H_g^*$  lassen sich nun Bedingungen herleiten, damit ein Gaborssystem ein Frame ist:

**Theorem 5.3.3.** *Seien  $A, B > 0$  und  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Gaborssystem. Dann gilt*

- (i) *Ein Gaborssystem  $\{g_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  ist genau dann eine Besselfolge mit Schranke  $B$ , wenn  $H_g(\nu)$  und  $H_g^*(\nu)$  für fast alle  $\nu \in \mathbb{R}$  beschränkte lineare Operatoren auf  $\ell^2(\mathbb{Z})$  mit Norm kleiner gleich  $\sqrt{aB}$  sind. Im Speziellen gilt*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\nu - mb)|^2 \leq aB, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\nu - k/a)|^2 \leq aB.$$

für fast alle  $\nu \in \mathbb{R}$ .

- (ii) *Ein Gaborssystem  $\{g_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  ist genau dann ein Frame, wenn*

$$AI \leq \frac{1}{a} H_g(\nu) H_g^*(\nu) \leq BI$$

für fast alle  $\nu \in \mathbb{R}$ , wobei  $I$  der Identitätsoperator auf  $\ell^2$  ist.

- (iii) *Zwei Gaborssysteme  $\{g_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  und  $\{h_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  die Besselfolgen sind, sind genau duale Frames wenn*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{g}(\nu - mb - k/a) \hat{h}^*(\nu - mb) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{h}(\nu - mb - k/a) \hat{g}^*(\nu - mb) = a\delta_{k,0}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

für fast alle  $\nu \in \mathbb{R}$  gilt, bzw. wenn

$$H_g(\nu) H_h(\nu)^* = H_h(\nu)^* H_g(\nu) = aI$$

für fast alle  $\nu \in \mathbb{R}$ .

Bemerkung: Die “Matrix”  $H_g(\nu) H_g^*(\nu)$  ist durch

$$H_g(\nu) H_g^*(\nu) = (\hat{g}(\nu - mb - k/a) \hat{g}^*(\nu - mb - \ell/m))_{k,\ell \in \mathbb{Z}}$$

für fast alle  $\nu \in \mathbb{R}$  gegeben. Gleichzeitig gilt aber auch

$$(H_g(\nu - j/a) H_g^*(\nu - j/a))_{k\ell} = (H_g(\nu) H_g^*(\nu))_{k+j, \ell+j}.$$

Es reicht also im Prinzip das Matrix Produkt nur für  $\nu$  in einem Intervall der Länge  $1/a$  zu bestimmen. Für die restlichen  $\nu$  müssen dann nur Blöcke der Matrix verschoben werden.

### 5.3.3 Kriterien für Gaborframes im Zeitbereich

Wie wir bereits oben gesehen haben, gibt es einen Zusammenhang zwischen Gaborframes mit Fenster  $g$  und Frames mit Fenster  $\hat{g}$ . So ist die Fouriertransformation von  $\mathcal{G}(g, a, b)$

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}g) = \mathcal{T}_{mb}\mathcal{E}_{-na}\hat{g} = e^{2\pi imnab}\mathcal{E}_{-na}\mathcal{T}_{mb}\hat{g}$$

und damit auch für der Frameoperator  $S_{\mathcal{G}(g,a,b)}$

$$\mathcal{F}(S_{\mathcal{G}(g,a,b)}f) = S_{\mathcal{G}(\hat{g},b,-a)}\hat{f} = S_{\mathcal{G}(\hat{g},b,a)}\hat{f}$$

für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Ausserdem sind zwei Gaborsystem  $\mathcal{G}(g, a, b)$  und  $\mathcal{G}(h, a, b)$  genau dann zueinander dual, wenn die Systeme  $\mathcal{G}(\hat{g}, b, a)$  und  $\mathcal{G}(\hat{h}, b, a)$  zueinander dual sind.

Diese Relationen werden ausgenutzt und anstelle der Matrix

$$H_g(\nu) = (\hat{g}(\nu - mb - k/a))_{k,m \in \mathbb{Z}}$$

betrachten wir die Matrix

$$M_g(x) := (g(x - na - k/b))_{k,n \in \mathbb{Z}}$$

für fast alle  $x \in \mathbb{R}$ . Alle Bedingungen für translationsinvariante Frames lassen sich von  $H_g$  auf  $M_g$  übertragen, d.h. z.B dass

**Theorem 5.3.4.** *Seien  $A, B > 0$ .*

- (i) *Ein Gaborsystem  $\{g_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  ist genau dann eine Besselfolge mit Schranke  $B$ , wenn  $M_g(x)$  und  $M_g^*(x)$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}$  beschränkten linearen Operatoren auf  $\ell^2(\mathbb{Z})$  mit Norm kleiner gleich  $\sqrt{aB}$  sind. Im Speziellen gilt*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(x - na)|^2 \leq bB, \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g(x - k/b)|^2 \leq bB.$$

für fast alle  $x \in \mathbb{R}$ .

- (ii) *Ein Gaborsystem  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ist genau dann ein Frame, wenn*

$$AI \leq \frac{1}{b} M_g(x) M_g^*(x) \leq BI$$

für fast alle  $x \in \mathbb{R}$ , wobei  $I$  der Identitätsoperator auf  $\ell^2$  ist.

- (iii) *Zwei Systeme  $\mathcal{G}(g, a, b)$  und  $\mathcal{G}(h, a, b)$ , die Besselfolgen sind, sind genau duale Frames, wenn*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g^*(x - na) h(x - na - k/b) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h^*(x - na) g(x - na - k/b) = b\delta_{k,0}, k \in \mathbb{Z}$$

für fast alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, bzw. wenn

$$M_g(\nu) M_h^*(\nu) = M_h(\nu) M_g^*(\nu) = bI$$

für fast alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Bemerkung: Das obige Theorem gibt auch gleich ein Kriterium an tight Frames an. In [4] wird noch ein ähnliches Kriterium angegeben:

**Theorem 5.3.5.** *Seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $a, b > 0$ . Angenommen (Kriterium (CC))*

$$B := \frac{1}{b} \sup_{x \in [0, a]} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x - na) g^*(x - na - k/b) \right| < \infty.$$

Dann ist  $\mathcal{G}(g, a, b)$  eine Besselfolge mit Schranke  $B$ . Gilt auch noch

$$A := \frac{1}{b} \inf_{x \in [0, a]} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(x - na)|^2 - \sum_{k \neq n} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x - na) g^*(x - na - k/b) \right| \right) > 0$$

dann ist  $\mathcal{G}(g, a, b)$  eine Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  mit Schranken  $A$  und  $B$ .

### 5.3.4 Zeit-Frequenzbereich

Eine dritte Darstellungsmöglichkeit geht auf das Dualitätsprinzip zurück [9, 5]. Das Dualitätsprinzip stellt einen Zusammenhang zwischen einem Abtastgitter  $\{na, mb\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$  und dem dualen Gitter  $\{n/b, m/a\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$  her:

**Theorem 5.3.6** (Dualitätsprinzip). *Seien  $a, b > 0$  und  $g \in L^2$ . Das Gaborssystem  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ist genau dann ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  mit Schranken  $A, B$  wenn das System  $\mathcal{G}(g, 1/b, 1/a) = \{\mathcal{E}_{m/a} \mathcal{T}_{n/b} g\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$  eine Rieszfolge mit Schranken  $abA, abB$  ist.*

Zur Erinnerung: Eine Rieszfolge in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  ist eine Familie  $\{\mathcal{T}_k g\}_{k \in \mathbb{Z}}$  mit

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_k \right\|^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$$

für alle *endlichen* Folgen  $\{\mathcal{T}_k g\}_{k \in \mathbb{Z}}$   $c$ . Damit hat Theorem 5.3.6 eine besondere Bedeutung, weil ein Nachweis einer Rieszfolgen oft einfacher ist, als der Nachweis eines Frames.

Ähnlich wie bei den "Matrizen"  $H_g$  und  $M_g$  können wir eine lineare Abbildung definieren: Sei  $g \in L^2$ , dann definieren wir die lineare Abbildung

$$U_g f = (\langle f, g_{k/b, \ell/a} \rangle)_{k, \ell \in \mathbb{Z}}, f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Dann gilt (ohne Beweis)

**Theorem 5.3.7.** *Ein Gaborssystem  $\mathcal{G}(g, a, b)$  hat genau dann eine endliche obere Schranke  $B$ , wenn  $U_g$  und  $U_g^*$  beschränkte lineare Operatoren mit Norm  $\leq \sqrt{abB}$  von  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ , bzw.  $\ell^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{Z})$  sind. Das Gaborssystem  $\mathcal{G}(g, 1/b, 1/a)$  hat dann die obere Schranke  $abB$ .*

**Theorem 5.3.8.** *Seien  $A, B > 0$ . Für ein Gaborssystem gilt genau dann*

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{nm} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, f \in L^2(\mathbb{R}),$$

wenn

$$AI \leq \frac{1}{ab} U_g U_g^* \leq BI$$

gilt, wobei  $I$  die Identität auf  $\ell^2$  ist.

## 5.4 Praktische Bedingungen

Als Folgerungen der Bedingungen im Zeit-, bzw. Frequenzbereich ergeben sich folgende einfacheren Bedingungen.

**Korollar 5.4.1.** *Sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$  beschränkt mit kompaktem Träger. Dann ist  $\mathcal{G}(g, a, b)$  eine Besselfolge für eine beliebige Wahl von  $a, b > 0$ .*

*Beweis.* Nachdem  $g$  kompakten Träger besitzt, sind  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(x - na)|^2$  und  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |g(x - k/b)|^2$  beschränkt. Der Rest folgt aus Theorem 5.3.4.  $\square$

**Bemerkung:** Beschränktheit und kompakter Träger reicht nur für die obere Frameschranke, um auch die untere Frameschranke einzuhalten, braucht es zusätzliche Bedingungen

**Korollar 5.4.2.** *Seien  $a, b > 0$  und  $g \in L^2(\mathbb{R})$  mit Träger innerhalb eines Intervalls  $I$  mit Länge  $|I| = 1/b$ . Darüber hinaus gilt für  $G(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(x - na)|^2$*

$$bA \leq G(x) \leq bB, \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  mit Schranken  $A$  und  $B$ . Der dazugehörige Frameoperator  $S$  und seine Inverse  $S^{-1}$  sind durch

$$Sf = \frac{G}{b}f, S^{-1}f = \frac{b}{G}f, f \in L^2(\mathbb{R})$$

gegeben.

*Beweis.* Weil der Träger von  $g$  innerhalb eines Intervalls der Länge  $\frac{1}{b}$  liegt, gilt für die Einträge der Matrix  $M_g(x)M_g^*(x)$

$$(M_g(x)M_g^*(x))_{kk'} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x - na - k/b) \overline{g\left(x - na - \frac{k'}{b}\right)} = 0 \text{ für alle } k - k' \neq 0.$$

$M_g(x)M_g^*(x)$  ist alle eine Diagonalmatrix mit Einträgen  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(x - na - k/b)|^2$ , deren Einträge wegen dem endlichen Träger von  $g$  und der Voraussetzung vom Satz nach oben und nach unten beschränkt sind. Somit sind die Bedingungen für Theorem 5.3.4 erfüllt, und wir haben eine Frame.

Wir können den Beweis aber auch ohne Theorem 5.3.4 durchführen: Nehmen wir an, dass  $f$  eine beschränkte Funktion mit kompaktem Träger ist. Weil  $f$  und  $\mathcal{T}_{na}g \in L^2(\mathbb{R})$  gilt das das Produkt  $f\overline{\mathcal{T}_{na}g} \in L^1(\mathbb{R})$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ , d.h.

$$\int_0^{1/b} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(x - k/b) \overline{g(x - na - k/b)}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) \overline{g(x - na)}| dx < \infty$$

Damit ergibt sich auch, dass  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(x - k/b) \overline{g(x - na - k/b)}| < \infty$  für alle  $x \in [0, 1/b]$  und wegen der Periodizität auch für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Also ist

$$F_n(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - k/b) \overline{g(x - na - k/b)}.$$

eine  $\frac{1}{b}$  periodische Funktion in  $L^1(0, \frac{1}{b})$ . Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \langle f, \mathcal{G}(g, a, b) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x - na)} e^{-2\pi i m b x} dx = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{1/b} f(x - k/b) \overline{g(x - na - k/b)} e^{-2\pi i m b x} dx = \\ &= \int_0^{1/b} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - k/b) \overline{g(x - na - k/b)} e^{-2\pi i m b x} dx = \int_0^{1/b} F_n e^{-2\pi i m b x} dx \end{aligned}$$

Das heißt die Framekoeffizienten ergeben sich aus den Koeffizienten der Fouriertransformation von  $F_n$ . Nachdem die Energie einer Funktion und die Energie ihrer Fourierkoeffizienten gleich sein müssen (Plancherel), folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \mathcal{G}(g, a, b) \rangle|^2 &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{b} \int_0^{1/b} F_n(x) e^{-2\pi i m b x} dx \right|^2 = \frac{1}{b} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{1/b} |F_n(x)|^2 dx = \\ &= \frac{1}{b} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{1/b} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{f(x - k/b)} g(x - na - k/b) F_n(x) dx = \\ &= \frac{1}{b} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x - na) F_n = \\ &= \frac{1}{b} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x - na) \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(x - j/b) \overline{g(x - na - k/b)} dx. \end{aligned}$$

Die Annahme an das Fenster war, dass sein Träger innerhalb eines Intervalls der Länge  $\frac{1}{b}$  liegt, d.h. aber auch, wenn  $g(x - na)$  nicht Null ist, muss  $g(x - na - k/b) = 0, |k| > 0$  sein. D.h. die obige Gleichung reduziert sich zu

$$\sum_{n, m \in \mathbb{Z}} |\langle f, \mathcal{G}(g, a, b) \rangle|^2 = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(x - na)|^2 = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 G(x) dx.$$

Bzgl. des Frameoperators gilt für eine stetige Funktion  $f$  mit kompaktem Träger

$$\langle Sf, f \rangle = \sum_{mn} |\langle f, \mathcal{G}(g, a, b) \rangle|^2 = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 G(x) dx = \left\langle \frac{G}{b} f, f \right\rangle.$$

Weil  $S$  stetig ist, gilt obiger Ausdruck für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Also entspricht der Operator  $S$  einer Multiplikation mit  $\frac{G}{b}$ , und es ergibt sich somit auch der Ausdruck für  $S^{-1}$ .  $\square$

**Theorem 5.4.3.** *Seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $a, b > 0$  gegeb. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i)  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ist ein tight Frame mit Schranke  $A = 1$ ,

(ii) Für fast alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x - na) g^*(x - na - k/b) = b \delta_{k,0}.$$

**Korollar 5.4.4.** Seien  $h \in L^2(\mathbb{R})$  und  $a, b > 0$  gegen. Darüber hinaus ist  $h$  eine reellwertige, nicht negative Funktion mit Träger innerhalb eines Intervalls der Länge  $|I| = \frac{1}{b}$  und es gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h(x - na) = 1$$

für fast alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann generiert das Fenster

$$g(x) = \sqrt{bh(x)}$$

einen tight Gaborframe mit Schranke  $A = 1$ .

**Korollar 5.4.5.** Sei  $g(x)$  eine stetige Fensterfunktion, deren Träger in einem Intervall  $I$  der Länge  $|I|$  liegt, und die im inneren von  $I$  strikt positiv ist. Dann ist  $\mathcal{G}(g, a, b)$  eine Frame für alle  $a \in (0, |I|)$  und  $b \in (0, 1/|I|]$ .

Bemerkung: Die obige Bedingungen sind in der Regel hinreichend. Es ist nicht so trivial herauszufinden, für welche Parameter  $(a, b) \notin (0, |I|) \times (0, 1/|I|]$  ein Gaborssystem ein Frame sein kann.

**Theorem 5.4.6.** Seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $a, b > 0$ . Ist  $ab > 1$ , dann kann  $\mathcal{G}(g, a, b)$  kein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  sein.

*Beweis.* Ohne Beweis. □

Das bedeutet aber noch lange nicht, dass  $ab \leq 1$  und  $g \neq 0$  ausreicht, damit ein Gaborssystem ein Frame wird. Als Gegenbeispiel dient hier zum Beispiel  $g = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}$  mit  $a \in (1/2, 1)$ , weil es keine Überschneidung zwischen den einzelnen verschobenen Fenstern gibt.

In den nächsten Beispielen mit B-Splines als Fensterfunktion wird der Translationsparameter der Einfachheit halber auf  $a = 1$  gesetzt. Das ist im Prinzip keine große Einschränkung, den mit Hilfe des Dilationsoperators kann  $a$  herumskaliert werden:

**Theorem 5.4.7.** Seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $a, b, c > 0$  und das System  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Gaborframe mit Schranken  $A$  und  $B$ . Dann ist das System  $\{\mathcal{E}_{mb/c} \mathcal{T}_{nac} g_c\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$  mit Fenster  $g_c := \mathcal{D}_c g = \frac{1}{\sqrt{c}} g(x/c)$  ein Gaborframe mit den gleichen Frameschranken.

*Beweis.* Im Kapitel über allgemeine Frameeigenschaften wurde in Lemma 4.2.14 gezeigt, dass die unitäre Abbildung eines Frames wieder ein Frame mit den selben Schranken ist.  $\mathcal{D}_c$  ist unitär, weil

$$\langle \mathcal{D}_c f, \mathcal{D}_c g \rangle = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} f(x/c) g^*(x/c) dx = \frac{c}{c} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g^*(y) dy = \langle f, g \rangle.$$

Also ist  $\{\mathcal{D}_c \mathcal{E}_{mb} \mathcal{T}_{na} g\}$  ebenfalls ein Frame, und es gilt

$$\mathcal{D}_c \mathcal{E}_{mb} \mathcal{T}_{na} = \mathcal{E}_{mb/c} \mathcal{D}_c \mathcal{T}_{na} = \mathcal{E}_{mb/c} \mathcal{T}_{nac} \mathcal{D}_c.$$

□

Betrachten wir einen Frame und seine dualen Frames gibt es einen Satz, der im Speziellen auf B-splines zugeschnitten werden kann:

**Theorem 5.4.8.** Seien  $N \in \mathbb{N}$  und  $g \in L^2(\mathbb{R})$  eine reelle beschränkte Funktion mit endlichem Träger  $\text{supp}(g) \subseteq [0, N]$ , für die darüber hinaus noch

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) = 1, x \in \mathbb{R}$$

gilt. Sei  $b \in (0, \frac{1}{2N-1}]$ .

Dann sind sowohl  $g$  als auch  $h$  mit

$$h(x) = bg(x) + 2b \sum_{k=1}^{N-1} g(x+k)$$

Fenster für duale Frames  $\mathcal{G}(g, 1, b)$  und  $\mathcal{G}(h, 1, b)$ .

*Beweis.* Per Definition ist  $g$  beschränkt und besitzt einen kompakten Träger. Das gleiche gilt auch für  $h$ . Daraus ergibt sich mit Korollar 5.4.1, dass beide Besselfolgen sind.

Mit Theorem 5.3.4 müssen nur noch gezeigt werden, dass

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x - k/b - n)h(x - n) = b\delta_{k,0}, x \in [0, 1]. \quad (5.3)$$

Die Funktion  $g$  "lebt" im Intervall  $[0, N]$ ,  $h$  im Intervall  $[-N+1, N]$ . Für  $k \neq 0$  bedeutet das, dass Gl. (5.3) erfüllt ist, wenn  $1/b \geq 2N-1$ , d.h. wenn  $b \in (0, \frac{1}{2N-1}]$ .

Für  $k = 0$  müssen wir zeigen, dass

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x - n)h(x - n) = b, x \in [0, 1],$$

was wegen  $\text{supp}(g) = [0, N]$  gleichbedeutend wie

$$\sum_{n=0}^{N-1} g(x+n)h(x+n) = b, x \in [0, 1]$$

ist. Setzen wir die Definition von  $h(x)$  in die obigen Gleichung erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{N-1} g(x+n)h(x+n) &= g(x) [g(x) + 2g(x+1) + \cdots + 2g(x+N-1)] + \\ &+ g(x+1) [g(x+1) + 2g(x+2) + \cdots + 2g(x+N-1)] + \\ &+ \cdots + \\ &+ \cdots + \\ &+ g(x+N-1)g(x+N-1) \end{aligned}$$

was sich nach endlichem Umsortieren zu

$$\left( \sum_{n=0}^{N-1} g(x+n) \right)^2 = 1$$

reduziert, weil  $g$  eine Zerlegung der Eins ist. □

Die Einschränkung von  $a = 1$  mag auf den ersten Blick vielleicht zu groß sein, aber mit Hilfe des Dilationsoperators kann der obere Satz auf beliebige  $a > 0$  ausgeweitet werden.

**Theorem 5.4.9.** *Seien  $N \in \mathbb{N}$  und  $g \in L^2(\mathbb{R})$  eine reelle beschränkte Funktion mit Träger  $\text{supp } g \subseteq [0, N]$ , die eine Zerlegung der Eins ist.*

*Für  $a, b > 0$  mit  $ab \in (0, \frac{1}{2N-1}]$  und*

$$h(x) = abg(x) + 2ab \sum_{k=1}^{N-1} g(x+k)$$

*generieren die Fenster  $\mathcal{D}_a g$  und  $\mathcal{D}_a h$  duale Gaborframes  $\mathcal{G}(\mathcal{D}_a, a, b)$  und  $\mathcal{G}(\mathcal{D}_a h, a, b)$  für  $L^2(\mathbb{R})$ .*

Die obige Konstruktion hat den Nachteil, dass das duale Fenster von symmetrischen  $g$  nicht symmetrisch ist. Es gibt jedoch (ohne Beweis) auch eine Konstruktionsanleitung für symmetrische duale Fensterpaare.

**Theorem 5.4.10.** *Seien  $N \in \mathbb{N}$  und  $g(x)$  eine reellwertige Funktion mit beschränktem Träger  $\text{supp}(g) \subseteq [0, N]$  und sei  $g$  eine Zerlegung der Eins. Seien  $a = 1, b \in (0, \frac{1}{2N-1}]$  und*

$$h = b \sum_{k=-N+1}^{N-1} g(x+k).$$

*Dann erzeugen  $g$  und  $h$  duale Gaborframes. Am Träger von  $g$  gilt  $h = b$  und ist  $g$  symmetrisch ist auch  $h$  symmetrisch.*

### 5.4.1 B-splines

Die schon in den vorigen Abschnitten vorgestellte B-spline Frames mit Fenster  $B_n$  sind Gaborframes für alle  $(a, b) \in (0, n) \times (0, 1/n)$ . Das ergibt sich direkt aus Korollar 5.4.5.

Sei  $g(t)$  durch das B-Spline  $N_\ell$  der Ordnung  $\ell$  gegeben, wobei

$$N_1(t) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{\ell+1}(t) = (N_\ell * N_1)(x) = \int_0^1 N_\ell(t - \tau) d\tau.$$

Für  $a = 1$  und  $b \in (0, \frac{1}{2\ell-1}]$  bilden  $N_\ell$  und

$$h_\ell(t) = bN_\ell(t) + 2b \sum_{k=1}^{\ell} N_\ell(t+k) \tag{5.4}$$

duale Frames  $\{M_{mb}T_n N_\ell\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  und  $\{M_{mb}T_n h_\ell\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ .

Ein weiteres Framepaar ist durch  $N_\ell$  und

$$h_\ell(t) = b \sum_{k=-\ell+1}^{\ell-1} N_\ell(t+k) \tag{5.5}$$

gegeben (siehe z.B. [4])

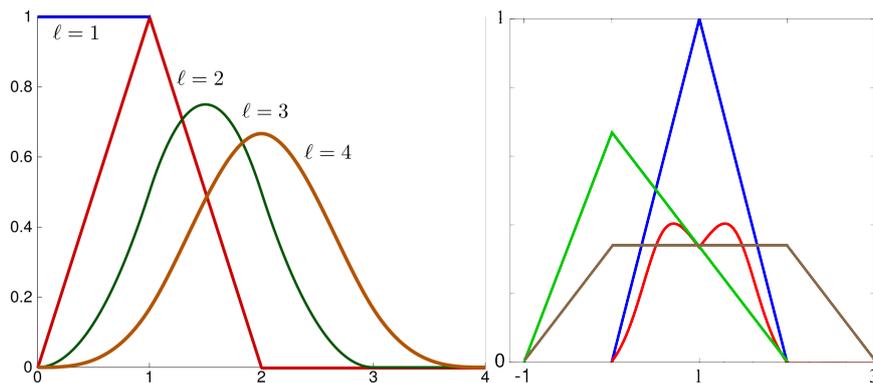


Abbildung 5.5: Links: B-Splines der Ordnung  $\ell = 1$  bis  $\ell = 4$ . Rechts: B-Spline Fenster (blau) und 3 duale Fenster.

### Anwendungsbeispiel für B-Spline Frames

Nachdem ein Frame in der Regel redundant ist, stellt sich natürlich die Frage “Ist es überhaupt Wert, eine Funktion mittels Frames darzustellen, und wenn ja, wie sollen die Koeffizienten bestimmt werden?” Im Folgenden wollen wir das Schallfeld am Einheitskreis, das durch eine ebene Welle erzeugt wird, mit Hilfe einer Basis aus linearen B-Splines und eines B-Spline Frames approximieren, und vergleichen die Approximationen mit Hilfe des Verhältnisses zwischen Approximationsfehler und der Anzahl der verwendeten Parameter.

Die analytische Lösung für dieses Problem ist durch

$$p(e^{i\phi}) = \frac{2}{\pi k} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{\cos(\phi)}{H'_n(k)}$$

mit  $\epsilon_0 = 1$  und  $\epsilon_n = 2, n > 0$  gegeben.  $H'_n$  bezeichnet die Ableitung der Hankel Funktion der  $n$ -ten Ordnung [3]. Damit die Generierung der Frames ein wenig einfacher wird, wird die Funktion auf das Intervall  $[0,3]$  skaliert (siehe Abbildung 5.6, wo sie für  $k = 5$  dargestellt wird). Auf der rechten Seite von Abbildung 5.6 ist der Approximationsfehler durch eine Basis aus linearen Funktionen gegeben, wobei das Intervall  $[0,3]$  in 60, 120, und 240 Subintervalle zerlegt wurde.

Diese Funktion soll im Intervall mittels folgender Funktionen approximiert werden:

- einer Basis aus 61, 121, 241 linearen Ansatzfunktionen (B-Splines der Ordnung 2),
- eines skalierten B-Splines mit  $a = 1$  und  $b = 1/3$ , sodass das Intervall mit 4 Fenstern abgedeckt werden kann (bzw. 3 B-Splines, wenn die Fenster periodisiert wären) (siehe Abb. 5.7). Die Framekoeffizienten werden dabei mit Hilfe
  - des kanonischen Dualframes,
  - des asymmetrischen Dualframes Gleichung (5.4),
  - des symmetrischen Dualframes Gleichung (5.5),
  - mit Hilfe eines (modifizierten) Orthogonal Matching Pursuit (OMP) Algorithmus

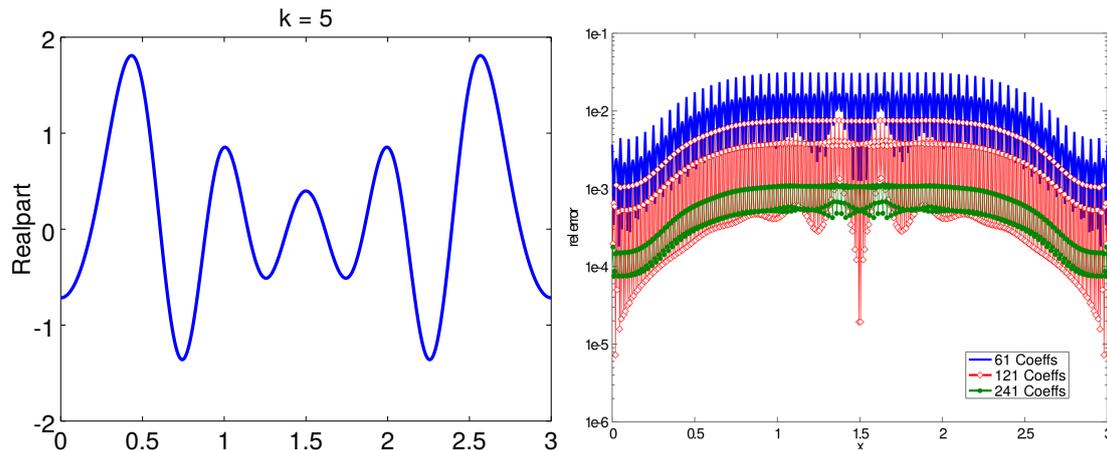


Abbildung 5.6: Realteil des akustischen Felds entlang des Zylinderquerschnitts für die Wellenzahlen  $k = 5$  und relativer Approximationsfehler, wenn eine Basis aus 61, 121, 241 linearen B-Splines verwendet wird.

bestimmt. Der OMP Algorithmus (siehe Abschnitt 4.4.3) ist ein greedy Algorithmus, mit dessen Hilfe unterbestimmte Gleichungssysteme  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$  iterativ gelöst werden können, wobei zusätzlich angenommen wird, dass der Lösungsvektor  $\mathbf{x}$  schwach besetzt ist, d.h. dass nur sehr wenige Einträge des Lösungsvektor (signifikant) von 0 verschieden sind (Stichwort: Compressed Sensing). Bei Verwendung der dualen Frames ergeben sich die Framekoeffizienten durch eine simple Vektormultiplikation der abgetasteten Zielfunktion mit dem abgetasteten dual Frameelement  $g_i$

$$c_i = \frac{2\pi}{N} \sum_{n=1}^N f[n] \cdot g_i^*[n],$$

die sozusagen eine einfache Quadratur des Integrals in Gleichung (4.4) ist.

Das Intervall  $[0, 3]$  mit 601 Punkten diskretisiert, und sowohl bei der Basis als auch beim Frame die jeweils diskretisierte Version verwendet<sup>3</sup>.

Betrachten wir die relativen Fehler, der sich durch die Approximation der Zielfunktion mittels der Frameelemente mit den 60 größten Framekoeffizienten ergibt, erzielen die B-Splines-Frames kaum eine Verbesserung gegenüber der Basis. In Abb. 5.8 wird dieser Fehler dargestellt. Für die hellblaue durchgehende Linie wurden die Framekoeffizienten mit Hilfe des 1. dualen Fensters Gl. (5.4) berechnet, für die gestrichelte rote Linie mit Hilfe des 2. dualen Fensters Gl. (5.5), die grüne Linien gibt den relativen Fehler für das kanonische Dual an, und die blaue gepunktete Linie den Fehler, wenn die 60 Koeffizienten mit dem Standard-OMP berechnet werden. Eine Verbesserung gegenüber der Basis ergibt sich erst so richtig, wenn 120 Koeffizienten verwendet werden. In diesem Fall erzielen wir mit dem 2. dualen Fenster einen annehmbaren Fehler. Dieses Verhalten wird klar, wenn man sich den Absolutwert der diversen Framekoeffizienten ansieht (siehe Fig. 5.9), die Koeffizienten für den Dual2-Frame fallen nach 100 Koeffizienten sehr rasch ab. Es ist dennoch verwunderlich, dass die Koeffizienten, die mit dem OMP berechnet wurden, einen so großen Fehler liefern. Dieser Fehler kann aber um einiges verringert werden, wenn eine kleine Modifikation des OMP betrachtet wird. In der Standardversion wird

<sup>3</sup>Es wäre mittels geeigneter Quadraturverfahren auch möglich, alles im  $L^2([0, 3])$  zu berechnen.

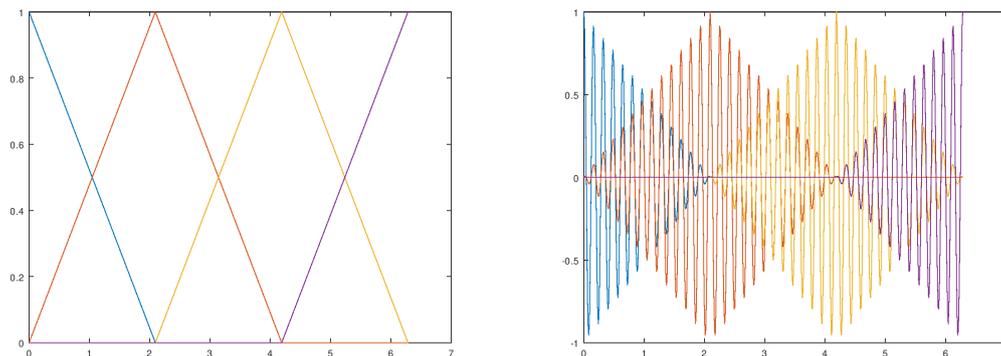


Abbildung 5.7: Realteil der B-Spline Frame Elemente für  $n = 1, \dots, 4$  und  $m = 0$  (links), bzw.  $m = 39$  (rechts).

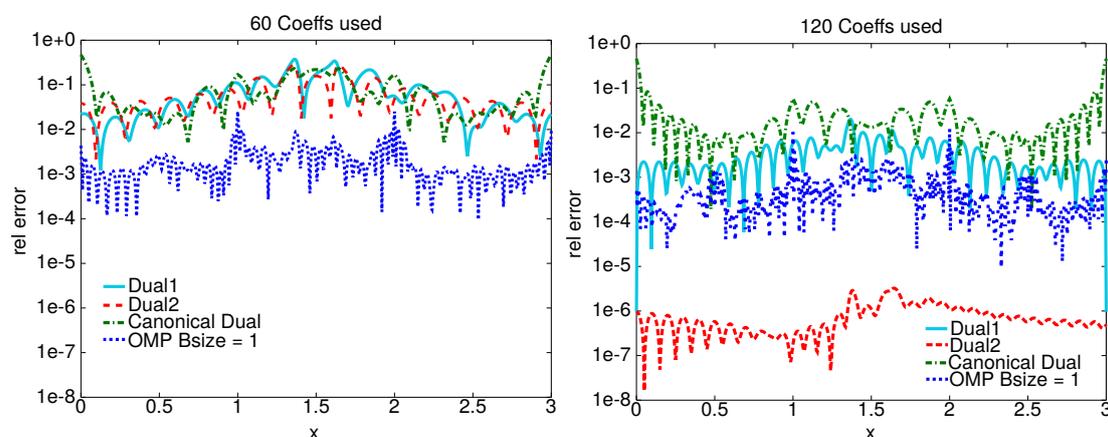


Abbildung 5.8: Approximationsfehler, wenn 60 bzw. 120 Framekoeffizienten, die auf verschiedene Arten berechnet werden, verwendet werden.

beim OMP pro Iterationsschritt ein Frame-Element ausgewählt und zu der Menge von Frame Elementen hinzugefügt, mit dessen Hilfe die Zielfunktion approximiert wird (mehr dazu im nächsten Abschnitt). Das kann bei großen Matrizen viel Zeit kosten, weshalb eine Blockversion des OMP gleich mehrere Vektoren pro Schritt auswählt. Werden zum Beispiel 20 Vektoren pro Iterationsschritt gewählt, wird das Verfahren für dieses Beispiel nicht nur um einiges schneller, sondern der Fehler wird auch um einiges geringer (siehe Abb. 5.9 rechts). Das bedeutet grob gesagt, dass Frames für dieses Beispiel einen Vorteil gegenüber Basen besitzen, aber bei der Berechnung der Framekoeffizienten sehr vorsichtig agiert werden muss. Im Bezug auf die Anwendung sind noch viele Fragen offen, die berücksichtigt und geklärt werden müssen. So ist zum Beispiel eine einfache Matrix-Vektormultiplikation bei Frames nicht ganz trivial, da theoretisch ein Frame unendlich viele Elemente besitzen kann. Das heißt, die Matrix  $\mathbf{A}$  muss spezielle Eigenschaften besitzen, an Hand deren es möglich ist, eine Routine APPLY zu finden, die für Vektoren  $\mathbf{x}$  mit nur endlich vielen Einträgen ungleich 0 und einem  $\varepsilon > 0$  mit verträglichem Aufwand einen Vektor  $\mathbf{y}$  mit endlichem Support generiert, sodass

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \varepsilon.$$

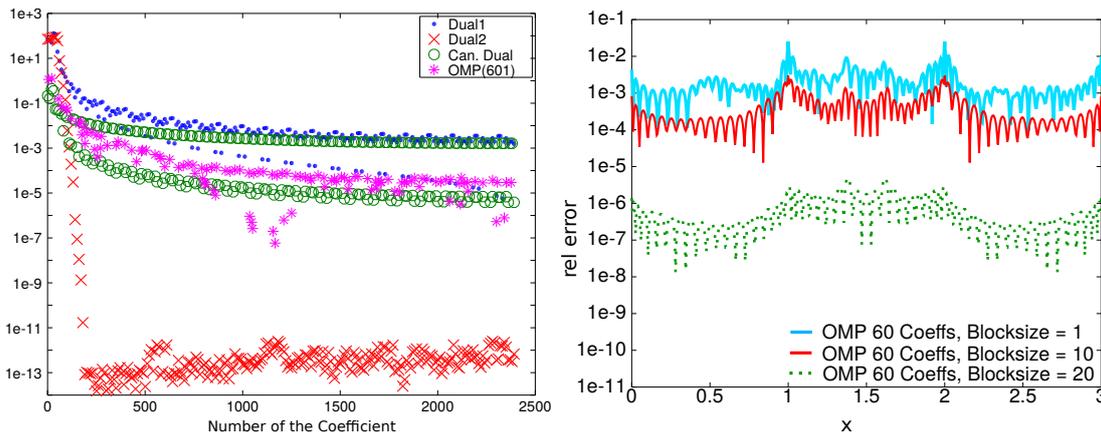


Abbildung 5.9: Links: Absolutwert der Framekoeffizienten, die durch die verschiedenen Ansätze berechnet wurden. Rechts: Approximationsfehler, wenn die Framekoeffizienten mit einem modifizierten OMP-Algorithmus berechnet werden.

### 5.4.2 Gaussfunktion

Für die Gaussfunktion  $g(x) = e^{-x^2}$  ist bekannt, dass das Gaborssystem  $\mathcal{G}(g, a, b)$  dann und nur dann ein Frame ist wenn  $ab < 1$ . Der Beweis an sich ist aber relativ kompliziert, und geht tief in die komplexe Analysis hinein. Aber die Gaussfunktion wird gerne als Fenster benutzt, weil sie schnelle genug abfällt, sodass ihr Träger in der Praxis als endliche angesehen werden kann, und die Fouriertransformation ebenfalls wieder eine Gaussfunktion ist.

### 5.4.3 Die Rechteckfunktion

Selbst für die Indikatorfunktion

$$g(x) := \chi_{[0,c]}, c > 0$$

ist es überraschend schwierig, Werte für  $a, b$  und  $c$  zu finden<sup>4</sup>, für die das Gaborssystem ein Frame ist (siehe auch [9] für eine Übersicht). Im Folgenden werden wir annehmen, dass  $b = 1$ , für alle anderen Fälle, ist es möglich, mittels Dilationsoperator wieder auf diesen Fall zurück zu transformieren.

- Für  $c < a$  oder  $a > 1$  ist  $\mathcal{G}(g, a, b)$  kein Frame.
- $\mathcal{G}(g, a, b)$  ist ein Frame für  $a \leq c \leq 1$ .
- Für  $a = 1$  und  $c > 1$  ist  $\mathcal{G}(g, a, b)$  kein Frame.

Für  $a < 1$  und  $c > 1$  gilt:

- $\mathcal{G}(g, a, b)$  ist ein Frame für  $a \notin \mathbb{Q}$  und  $c \in (1, 2)$
- Für  $a = p/q \in \mathbb{Q}$ ,  $\text{ggt}(p, q) = 1$  und  $2 - \frac{1}{q} < c < 2$ .
- Für  $a > \frac{3}{4}$  und  $c = L - 1 + L(1 - a)$  mit  $L \in \mathbb{N}$ ,  $L \geq 3$  ist  $\mathcal{G}(g, a, b)$  kein Frame.

<sup>4</sup>ausserhalb der Bereiche, die durch die obigen Theoreme beschrieben werden.

Weil die Konstruktion eines dualen Frames in der Regel nicht immer einfach ist, werden gerne tight Frames betrachtet.

**Theorem 5.4.11.** *Seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $a, b > 0$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Das System  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ist ein tight Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  mit Frameschranke  $A = 1$ .*

(ii) *Für fast alle  $x \in \mathbb{R}$  gelten:*

$$(a) \quad G(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(x - na)|^2 = b$$

$$(b) \quad G_k(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x - na) \overline{g(x - na - k/b)} = 0 \text{ für alle } k \neq 0.$$

*Wenn die Bedingungen erfüllt sind, ist  $\mathcal{G}(g, a, b)$  genau dann eine orthonormale Basis für  $L^2(\mathbb{R})$ , wenn  $\|g\| = 1$ .*

*Beweis.* Siehe [4, Abschnitt 9.2]. □

**Korollar 5.4.12.** *Seien  $a, b > 0$  und  $g \in L^2(\mathbb{R})$  eine reelwertige nicht negative Funktion mit Träger innerhalb eines Intervalls  $I$  mit Länge  $\frac{1}{b}$ . Ist  $\{\mathcal{T}_{na}g\}_{n \in \mathbb{Z}}$  eine Partition der Eins, d.h. gilt*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x + na) = 1$$

*generiert die Funktion  $\sqrt{bg(x)}$  einen tight Gaborframe mit Frameschranke  $A = 1$ .*

**Beispiel 5.4.13.** Für alle Ordnungen  $\ell$  erfüllen die B-splines die obigen Bedingungen mit  $a = 1$  und  $b \in (0, \frac{1}{\ell}]$ .

## 5.5 Duale Gaborframes

Im Prinzip wird der kanonische Dualframe durch Anwendung des inversen Frameoperators  $S^{-1}$  auf die einzelnen Frameelemente generiert. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass der kanonische Dualframe für Gaborframes wieder eine Gaborstruktur besitzt, d.h. er wird durch Verschieben und Modulation eines dualen Fensters generiert:

**Lemma 5.5.1.** *Seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $a, b > 0$ , und  $\mathcal{G}(g, a, b)$  eine Besselfolge mit Operator  $S = TT^*$ , wobei  $T$  der Synthesepoperator für  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ist. Dann gilt*

$$(i) \quad S\mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na} = \mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}S \text{ für alle } m, n \in \mathbb{Z}$$

(ii) *Wenn  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Frame ist, d.h. wenn  $S$  invertierbar ist, dann gilt*

$$S^{-1}\mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na} = \mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}S^{-1}, \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

*Beweis.* Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  und nehmen wir an, dass  $\mathcal{G}(g, a, b)$  eine Besselfolge ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
S\mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}f &= \sum_{m',n' \in \mathbb{Z}} \langle \mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}f, \mathcal{E}_{m'b}\mathcal{T}_{n'a}g \rangle \mathcal{E}_{m'b}\mathcal{T}_{n'a}g = \\
&= \sum_{m',n' \in \mathbb{Z}} \langle f, \mathcal{T}_{-na}\mathcal{E}_{(m'-m)b}\mathcal{T}_{n'a}g \rangle \mathcal{E}_{m'b}\mathcal{T}_{n'a}g = \\
&= \sum_{m',n' \in \mathbb{Z}} \left\langle f, e^{2\pi i na(m'-m)b}\mathcal{E}_{(m'-m)b}\mathcal{T}_{(n'-n)a}g \right\rangle \mathcal{E}_{m'b}\mathcal{T}_{n'a}g = \\
&= \sum_{m',n' \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i nam'b} \langle f, \mathcal{E}_{m'b}\mathcal{T}_{n'a}g \rangle \mathcal{E}_{(m'+m)b}\mathcal{T}_{(n'+n)a}g = \\
&= \sum_{m',n' \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i nam'b} \langle f, \mathcal{E}_{m'b}\mathcal{T}_{n'a}g \rangle e^{2\pi i nam'b} \mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}\mathcal{E}_{m'b}\mathcal{T}_{n'a}g = \\
&= \mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na} \sum_{m',n' \in \mathbb{Z}} \langle f, \mathcal{E}_{m'b}\mathcal{T}_{n'a}g \rangle \mathcal{E}_{m'b}\mathcal{T}_{n'a}g = \\
&= \mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}Sf.
\end{aligned}$$

Für Punkt (ii) wenden wir einfach die Gleichung  $S^{-1}$  rechts und links auf die Gleichung von (i) an □

Mit Hilfe des Lemmas ergibt sich nun auch:

**Theorem 5.5.2.** *Seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $a, b > 0$  und  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Frame. Dann gilt:*

(i) *Der kanonische Dualframe besitzt eine Gaborstruktur und wird durch*

$$\{\mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}S^{-1}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$$

*gebildet.*

(ii) *Der kanonische tight Frame zu  $\mathcal{G}(g, a, b)$  wird durch*

$$\{\mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}S^{-1/2}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$$

*gebildet*

*Beweis.* Nachdem  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Frame ist, ist der Frameoperator  $S$  invertierbar, also ergibt sich (i) direkt aus dem obigen Lemma.

Es läßt sich zeigen<sup>5</sup>, dass  $S^{-1}$  mit  $\mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}$  kommutiert, woraus (ii) folgt. □

Mit dem Satz ist die Konstruktion vom kanonischen Dualframe im Prinzip natürlich viel einfacher und effizienter, weil nur eine duale Fensterfunktion gefunden werden muss, und mit diesem neuen Fenster ein Gaborssystem generiert wird.

In der Literatur lassen sich auch viele Beispiele finden, wo der kanonische Dualframe sehr angenehme Eigenschaften besitzt. Ist zum Beispiel der ursprüngliche Gaborframe redundant, und die Fensterfunktion  $g$  exponentiell abfallend, so gilt das auch für  $S^{-1}g$ . Für redundante Gaborframes gilt auch, dass wenn  $\hat{g}$  exponentiell abfällt, das auch für  $\mathcal{F}(S^{-1}g)$  gilt. Und die Eigenschaften für  $S^{-1}g$  lassen sich auch direkt auf  $S^{-1/2}g$  übertragen.

Das ist einer der Gründe, wieso  $g = e^{-x^2}$  als klassische Fensterfunktion gewählt wird:

---

<sup>5</sup>Hier ohne Beweis.

**Theorem 5.5.3.** *Sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$ , und haben sowohl  $g$  als auch  $\hat{g}$  exponentiellen Abfall. Sei  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Frame für  $a, b > 0$ . Dann ist  $\{\mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}S^{-1/2}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  ein tight Frame, für den sowohl  $S^{-1/2}g$  als auch  $\mathcal{F}(S^{-1/2}g)$  exponentiellen Abfall besitzen.*

Nachdem die Fenster also sowohl im Zeit-, als auch im Frequenzbereich exponentiellen Abfall besitzen, ist theoretisch eine sehr gute Zeit-Frequenz Lokalisierung möglich. Der einzige Nachteil bei dem obigen Frame, ist die Tatsache, dass es bis jetzt keine explizite Darstellung von  $S^{-1}e^{-x^2}$  gibt.

Aber Vorsicht, nur weil der kanonische Dualframe eine Gaborstruktur besitzt, bedeutet, dass noch lange nicht, dass alle dualen Frames eine Gaborstruktur besitzen.

**Lemma 5.5.4.** *Sei  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein redundanter Frame. Dann existiert mindestens ein dualer Frame, der keine Gaborstruktur besitzt, d.h. der nicht über Translation und Modulation eines dualen Fensters generiert werden kann.*

*Beweis.* Der Beweis ist ganz ähnlich zum Beweis von Theorem 4.2.8. Um die Notation zu vereinfachen, definieren wir

$$g_{mn} = \mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}g,$$

und

$$\tilde{g}_{mn} = \mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}S^{-1}g,$$

wobei  $S$  der Frameoperator von  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ist.

Angenommen, es gäbe einen Index  $(m', n')$  für den  $g_{m'n'} = 0$ , dann können wir  $\tilde{g}_{m'n'}$  nach Belieben ändern.

Seien nun also all  $g_{mn} \neq 0$ . Nachdem  $\{g_{mn}\}$  redundant ist, gibt es per Definition eine nicht triviale Folge  $\{c_{mn}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  für die

$$\sum_{mn \in \mathbb{Z}} c_{mn}g_{mn} = 0.$$

Sei nun  $c_{m'n'} \neq 0$ , dann gilt

$$g_{m'n'} = -\frac{1}{c_{m'n'}} \sum_{(m,n) \neq (m',n')} c_{mn}g_{mn}.$$

Wenn wir jetzt noch zeigen können, dass  $\{g_{mn}\}_{(m,n) \neq (m',n')}$  ein Frame ist, sind wir wieder fertig, denn wenn wir für alle  $(m, n) \neq (m', n')$  das duale Frameelement  $\psi_{mn} = \tilde{g}_{mn}$  setzen und  $\psi_{m'n'} = 0$  haben wir eine Frame gefunden, der nicht der kanonische Dualframe ist, weil  $\tilde{g}_{m'n'} = S^{-1}g_{m'n'} \neq 0$  ist, und weil auch dieses Element nicht durch Translation und Modulation des dualen Fensters gebildet wurde.

Also betrachten wir für ein beliebiges  $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} |\langle f, g_{m'n'} \rangle|^2 &= \left| \frac{1}{c_{m'n'}} \sum_{(m,n) \neq (m',n')} c_{mn}g_{mn} \right|^2 \leq \frac{1}{|c_{m'n'}|^2} \sum_{(m,n) \neq (m',n')} |c_{mn}|^2 \sum_{(m,n) \neq (m',n')} |\langle f, g_{mn} \rangle|^2 = \\ &= C \sum_{(m,n) \neq (m',n')} |\langle f, g_{mn} \rangle|^2. \end{aligned}$$

Weil  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Frame ist gilt die untere Framebedingung

$$\begin{aligned} A\|f\|^2 &\leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_{nm} \rangle|^2 = \sum_{(m,n) \neq (m',n')} |\langle f, g_{mn} \rangle|^2 + |\langle f, g_{m'n'} \rangle|^2 \leq \\ &\leq (1+C) \sum_{(m,n) \neq (m',n')} |\langle f, g_{mn} \rangle|^2. \end{aligned}$$

□

Aber wir können mit Hilfe von Theorem 4.3.7 alle dualen Frames bestimmen, die eine Gaborstruktur besitzen. Zur Erinnerung Theorem 4.3.7 besagt Folgendes:

Sei  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  ein Frame für  $\mathcal{H}$ . Die dualen Frames für  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  sind genau alle Familien

$$\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ S^{-1}\phi_k + h_k - \sum_{j=1}^{\infty} \langle S^{-1}\phi_k, \phi_j \rangle h_j \right\}_{k=1}^{\infty},$$

wobei  $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Besselfolge in  $\mathcal{H}$  ist.

Für Gaborframes ergibt sich damit:

**Theorem 5.5.5.** *Seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $a, b > 0$  und  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Gaborframe für  $L^2(\mathbb{R})$ . Die dualen Frames, die eine Gaborstruktur besitzen, sind die Familien  $\mathcal{G}(h, a, b)$  mit Fenster*

$$h = S^{-1}g + f - \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle S^{-1}g, \mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}g \rangle \mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}f,$$

wobei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  eine Fenster ist, dass eine Besselreihe  $\mathcal{G}(f, a, b)$  generiert.

*Beweis.* Passen wir erst einmal die Notation in Theorem 4.3.7 der Gabornotation an, wobei  $g_{mn} = \mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}g$  ist:

$$h_{m'n'} = S^{-1}(g_{m'n'}) + f_{m'n'} - \sum_{mn \in \mathbb{Z}} \langle S^{-1}g_{m'n'}, g_{mn} \rangle f_{mn}$$

Also müssen wir zeigen, dass  $h_{m'n'} = \mathcal{E}_{m'b}\mathcal{T}_{n'a}h$  ist.

Damit  $h_{m'n'}$  überhaupt eine Gaborstruktur besitzen kann, ist klar, dass  $f_{m'n'}$  so eine Struktur haben muss, also gilt einmal  $f_{m'n'} = \mathcal{E}_{m'b}\mathcal{T}_{n'a}f$ , das Gleiche gilt für  $g$  und das duale Fenster  $\tilde{g} = S^{-1}g$ , und weil  $\tilde{g}$  das duale Fenster ist, gilt  $\tilde{g}_{m'n'} = S^{-1}g_{m'n'}$ .

Das heißt, wir müssen nur noch zeigen, dass

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle S^{-1}g, g_{mn} \rangle \mathcal{E}_{m'b}\mathcal{T}_{n'a}f_{mn} = \sum_{mn \in \mathbb{Z}} \langle S^{-1}g_{m'n'}, g_{mn} \rangle f_{mn}.$$

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle S^{-1}g_{m'n'}, g_{mn} \rangle f_{mn} =$$

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m' b y} \tilde{g}(y - n'a) e^{-2\pi i m b y} g^*(y - na) dy \right) e^{2\pi i m b x} f(x - na)$$

Nachdem wir über  $m, n \in \mathbb{Z}$  summieren, dürfen wir die Indizierung ein wenig ändern, d.h.  $m \leftrightarrow m + m'$ ,  $n \leftrightarrow n - n'$  und  $y \leftrightarrow y - n'a$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m' b y} \tilde{g}(y - n'a) e^{-2\pi i (m+m') b y} g^*(y - (n - n')a) dy \right) e^{2\pi i (m+m') b x} f(x - (n - n')a) = \\ &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i m b n' a} \langle \tilde{g}, g_{mn} \rangle \mathcal{E}_{m'} \mathcal{E}_m \mathcal{T}_{n'} \mathcal{T}_n f = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \langle \tilde{g}, g_{mn} \rangle \mathcal{E}_{m'} \mathcal{T}_{n'} \mathcal{E}_m \mathcal{T}_n f = \\ &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \langle S^{-1} g, g_{mn} \rangle \mathcal{E}_{m'} \mathcal{T}_{n'} f_{mn}. \end{aligned}$$

□

Duale Frames mit Gaborstruktur können auch noch einfach über das Wexler-Raz Theorem charakterisiert werden, dass eine Folge von Th. 5.3.3 ist:

**Theorem 5.5.6** (Wexler-Raz). *Seien  $g, h \in L^2(\mathbb{R})$  und  $a, b > 0$ . Wenn die zwei Gabor-systeme  $\mathcal{G}(g, a, b)$  und  $\mathcal{G}(h, a, b)$  Besselfolgen bilden, sind sie genau dann duale Frames wenn*

$$\langle h, \mathcal{E}_{m/a} \mathcal{T}_{n/b} g \rangle = 0, \quad (m, n) \neq (0, 0) \quad \text{und} \quad \langle h, g \rangle = ab.$$

*Beweis.* Mit Th. 5.3.3 folgt, dass beide Gaborsysteme genau dann duale Frames sind, wenn

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{g}^*(\nu - mb) \hat{h}(\nu - mb - k/a) = a \delta_{k,0}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (5.6)$$

ist.

Betrachten wir einmal die Funktion

$$\varphi_k(\nu) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{g}^*(\nu - mb) \hat{h}(\nu - mb - k/a).$$

Diese Funktion ist wohldefiniert und periodisch mit Periode  $b$ . D.h. wir können die Fouriertransformation/Fourierreihe von  $\varphi_k$  betrachten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \int_0^b \varphi_k(\nu) e^{-2\pi i n \nu / b} d\nu &= \frac{1}{b} \int_0^b \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{g}^*(\nu - mb) \hat{h}(\nu - k/a - mb) e^{-2\pi i n \nu / b} d\nu = \\ &= \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}^*(\nu) \hat{h}(\nu - k/a) e^{-2\pi i n \nu / b} d\nu = \\ &= \frac{1}{b} \langle \mathcal{T}_{k/a} \hat{h}, \mathcal{E}_{n/b} \hat{g} \rangle = \frac{1}{b} \langle \hat{h}, \mathcal{T}_{-k/a} \mathcal{E}_{n/b} \hat{g} \rangle = \\ &= \frac{1}{b} \langle h, \mathcal{E}_{-k/a} \mathcal{T}_{-n/b} g \rangle. \end{aligned}$$

Gl. (5.6) ist eine mehr oder weniger elegante Weise sicherzustellen, dass  $\varphi_k = 0, k \neq 0$ , damit ist aber auch die Fouriertransformation  $\widehat{\varphi}_k = 0$ . Die Bedingung besagt auch, dass  $\varphi_0(\nu) = a$ , und somit sind auch alle Fourierkoeffizienten  $\widehat{\varphi}_0(n) = a \delta_{n,0}$ . Damit ergibt sich aber das Wexler-Raz Theorem. □

## 5.6 Zeit-Frequenz-Lokalisierung

Es ist ein bekanntes Phänomen (Stichwort: Heisenbersche Unschärferelation, Balian Low Theorem), dass eine Funktion  $g \neq 0$  entweder kompakten Träger im Zeit- oder im Frequenzbereich besitzen kann, aber nicht in beiden. In der Praxis sind Signale aber glücklicherweise essentiell lokalisiert, d.h. sie treten innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls auf, und ihre dominanten Frequenzkomponenten befinden sich innerhalb eines endlichen Frequenzbandes.

Für die Darstellung mittels Gaborframes, bedeutet das, dass im Prinzip die Koeffizienten für  $|m| > M$  und  $|n| > N$  vernachlässigt werden können. Aber wie groß ist der Fehler, der dadurch entsteht.

Betrachten wir zwei Arten von Beschränkungsoperatoren:

**Zeitbeschränkung:**  $Q_T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), Q_T f(x) = \chi_{[-T,T]}(x)f(x)$ .

**Frequenzbeschränkung:**  $P_\Omega : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \widehat{P_\Omega f}(\nu) = \chi_{[-\Omega,\Omega]}(\nu)\hat{f}(\nu)$ .

Im Folgenden werden  $\|(I-Q_T)f\|$  und  $\|(I-P_\Omega)f\|$  benutzt, um den "Informationsgehalt" von  $f$  ausserhalb der vorgegeben Schranken zu messen.

Wenn wir annehmen, dass  $f$  sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich gut lokalisiert ist, d.h. zum Beispiel auf dem Gebiet  $[-T, T] \times [-\Omega, \Omega]$ , stellt sich die Frage, was passiert, wenn wir in der Framedarstellung

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \mathcal{E}_{mb} \mathcal{T}_{na} h \rangle \mathcal{E}_{mb} \mathcal{T}_{na} g$$

die Summe über  $\mathbb{Z}$  durch die Summe über

$$B(T, \Omega) := \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : mb \in [-\Omega, \Omega], na \in [-T, T]\}$$

ersetzen.

**Theorem 5.6.1.** *Seien  $\mathcal{G}(g, a, b)$  und  $\mathcal{G}(h, a, b)$  ein Paar dualer Gaborframes in  $L^2(\mathbb{R})$  mit oberen Frameschranken  $B_1$  und  $B_2$ . Nehmen wir darüber hinaus an, dass*

$$|h(x)| \leq C(1+x^2)^{-\alpha}, x \in \mathbb{R}, |\hat{h}(\nu)| \leq C(1+\nu^2)^{-\alpha}, \nu \in \mathbb{R},$$

für Konstanten  $C > 0$  und  $\alpha > 1/2$  erfüllt. Dann gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$ , Konstanten  $\Delta, \Gamma > 0$ , sodass für alle  $T, \Omega > 0$  und  $f \in L^2(\mathbb{R})$  gilt:

$$\|f - \sum_{(m,n) \in B(T+\Delta, \Omega+\Gamma)} \langle f, \mathcal{E}_{mb} \mathcal{T}_{na} h \rangle \mathcal{E}_{mb} \mathcal{T}_{na} g\| \leq \sqrt{B_1 B_2} (\|(I-Q_T)f\| + \|(I-P_\Omega)f\|) + \varepsilon \|f\|$$



# Kapitel 6

## Gaborframes abseits von $L^2(\mathbb{R})$

Um nun wirklich mit Frames arbeiten zu können, wird es notwendig sein, abgetastete Fenster und Funktionen zu betrachten. Das heißt, es ist auch wichtig zu wissen, wie sich die Eigenschaft, dass ein System  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Gaborframe für  $L^2(\mathbb{R})$  ist, auf Frames in  $\ell^2(\mathbb{Z})$  oder gar  $\mathbb{C}^N$  übertragen läßt. Relevante Bedingungen an die Fensterfunktionen für den Fall  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  wurden von Janssen gefunden, in [11] wurde untersucht, wie sich Frameeigenschaften von  $L^2(\mathbb{R})$  auf  $\ell^2(\mathbb{Z})$ ,  $L^2([0, L])$  und  $\mathbb{C}^N$  durch Abtasten und Periodisierung übertragen lassen. Dabei gibt zusätzliche Anforderungen an die generierenden Fenster, auf die wir kurz eingehen wollen, ohne sie im Detail zu beweisen. Es soll darauf hingewiesen werden, dass diese Anforderungen teilweise hinreichend sind, aber in der Praxis gut verwendbar sind. Wir werden uns im Folgenden an [11] halten, wo das Zusammenspiel zwischen Frames in den verschiedenen Räumen gut zusammengefasst wurde.

Nachdem Gaborframes viel mit Fouriertransformation, Modulation- und Translationsoperatoren zu tun haben, wollen wir zunächst einmal betrachten, wie denn diese Operatoren in den verschiedenen Räumen überhaupt aussehen, und auch genauer definieren, was unter Periodisierung und Abtasten verstanden wird. Um die Notation zu vereinfachen, verwenden wir für die Bezeichnung  $f(k) = f_k$  für einzelne Elemente eine Folge  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

### 6.1 Fouriertransformation

Der vielleicht auffälligste Unterschied zwischen den Räumen ist die Definition der Fouriertransformation/reihen:

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) : \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(f)(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\nu x} dx,$$

$$\mathcal{F}_{[0,L]} : L^2([0, L]) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) : \mathcal{F}_{[0,L]}(f)(k) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L f(x)e^{-2\pi i k x/L} dx,$$

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2([0, 1]) : \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(\{c_k\})(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k x},$$

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^L \rightarrow \mathbb{C}^L : \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(f(k)) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{j=0}^{L-1} f(j)e^{-2\pi i k j/L}, k = 0, \dots, L-1.$$

Bemerkung: Bei der Definition der Fouriertransformation sind wir davon ausgegangen, dass wir von  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  gehen, was im Prinzip schon eine Erweiterung der ur-

sprünglich Definition ist.

## 6.2 Translation und Modulation

Mit der obigen Konvention, dass ein Folgeelement  $f_k$  mit  $f(k)$  bezeichnet wird, läßt sich der Translationsoperator für die 4 Räume gleich definieren, mit dem einen Unterschied, dass im Fall von  $\ell^2(\mathbb{Z})$  und  $\mathbb{C}^L$  der Translationsparameter nur ganzzahlig sein darf. Im Fall  $L^2([0, L])$  wird darüber hinaus angenommen, dass es sich hierbei, um den Raum der *periodischen* Funktionen handelt.

In  $\ell^2(\mathbb{Z})$  würde theoretisch ein Modulationparameter  $b \in \mathbb{R}$  möglich sein, aber Jannsen schränkt diese Möglichkeit auf Parameter der Form  $\mathcal{E}_{m/M}$ ,  $M \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  ein. Das mag jetzt vielleicht ein wenig aus dem Hut gezaubert sein, aber andererseits, wenn wir die Fourierreihe  $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}$ , bzw.  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  betrachten, läßt sich diese Vorgehensweise schon ein wenig motivieren. Wegen der Periodizität von  $\mathcal{E}_{m/M}$  reicht es auch,  $m = 0, 1, \dots, M - 1$  zu betrachten.

**Definition 6.2.1** (Modulationoperator in den verschiedenen Räumen).

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\nu} : L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) : \mathcal{E}_{\nu}(f)(x) = e^{2\pi i \nu x} f(x), \quad x, \nu \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{E}_L : L^2([0, L]) &\rightarrow L^2([0, L]) : \mathcal{E}_L(f)(x) = e^{2\pi i k x/L} f(x), \quad x \in [0, L], k \in \mathbb{Z}, \\ \mathcal{E}_M : \ell^2(\mathbb{Z}) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) : \mathcal{E}_M(f)(j) = e^{2\pi i j m/M} f(j), \quad m, j \in \mathbb{Z}, \\ \mathcal{E}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^L &\rightarrow \mathbb{C}^L : \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(f)(x) = e^{2\pi i k j/L} f(j), \quad j, k = 0, \dots, L - 1. \end{aligned}$$

## 6.3 Mögliche Klassen von Fenstern

Wie schon bereits oben erwähnt, gibt es gewisse Anforderungen an die Fensterfunktion  $g \in L^2(\mathbb{R})$ , damit a) die Systeme in  $L^2(\mathbb{R})$  überhaupt Frames sind, und die Frameeigenschaften auf andere Räume übertragen werden können.

Jannsen benutze zu diesem Zweck zwei spezielle Bedingungen, die sicherstellen, dass gewisse Konvergenzeigenschaften sicher gestellt werden, und dass das Fenster rund um die Abtaststellen gewisse Regularitätseigenschaften besitzt. In [11] wird auf die Klasse  $S_0(\mathbb{R})$ , die als Feichtinger's Algebra bezeichnet wird, zurückgegriffen. Diese Klasse ist zwar ein wenig restriktiver, aber dennoch gut geeignet für unsere Zwecke.

**Definition 6.3.1** (Feichtinger's Algebra). *Eine Funktion  $g \in L^2(\mathbb{R})$  gehört zu  $S_0(\mathbb{R})$ , wenn*

$$\|g\|_{S_0} := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \phi^*(t-x) e^{-2\pi i t \nu} dt \right| dx d\nu < \infty, \quad (6.1)$$

wobei  $\phi$  eine (Fenster)funktion aus der Schwarz-Klasse der glatten und exponentiell abfallenden Funktionen ist.

Auf den ersten Blick mag die Definition relativ kompliziert und einschränkend aussehen. Aber bei näherer Betrachtung kann gesehen werden, dass das innere Integral im Prinzip die Kurzzeitfouriertransformation von  $g$  mit Fenster  $\phi$  ist. Die Bedingung Gl. (6.1) ist somit die Bedingung an die Koeffizienten der Kurzzeitfouriertransformierten von  $g$ . Ausserdem gibt es noch die einfache Bedingung:

**Theorem 6.3.2.** *Wenn  $g, g'$  und  $g'' \in L^1(\mathbb{R})$  so folgt, dass  $g \in S_0(\mathbb{R})$ .*

Als Fenster für die periodischen Funktionen  $g \in L^2([0, L])$  wird in [11]  $S_0([0, L]) = \mathcal{A}([0, L])$  benutzt. Das ist die Menge der Funktionen im Intervall  $[0, L]$ , die eine absolut konvergente Fourierreihe besitzen:  $\mathcal{A}([0, L]) = \mathcal{F}^{-1}\ell^1(\mathbb{Z})$ .

## 6.4 Abtasten und Periodisierung

Wie schon in den vorigen Kapiteln ergibt sich die Periodisierung im Prinzip als Summe über die verschobenen Fenster. Mit Fenstern aus Feichtinger's Algebra kann gezeigt werden, dass die abgetasteten und periodisierten Fenster auch beschränkte Normen besitzen.

Sei  $a > 0$  und  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Die Abtastoperatoren sind dann durch

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_a : S_0(\mathbb{R}) &\rightarrow \ell^1(\mathbb{Z}) : \mathcal{S}_a(g)(j) = \sqrt{a}g(ja), j \in \mathbb{Z}, \\ \mathcal{S}_a : C([0, aL]) &\rightarrow \mathbb{C}^L : \mathcal{S}_a(g)(j) = \sqrt{a}g(ja), j = 0, \dots, L-1, \\ \mathcal{S}_\alpha : \ell^1(\mathbb{Z}) &\rightarrow \ell^1(\mathbb{Z}) : \mathcal{S}_\alpha(g)(j) = \sqrt{\alpha}g(j\alpha), j \in \mathbb{Z}, \\ \mathcal{S}_\alpha : \mathbb{C}^{\alpha L} &\rightarrow \mathbb{C}^L : \mathcal{S}_\alpha(g)(j) = \sqrt{\alpha}g(j\alpha), j = 0, \dots, L-1 \end{aligned}$$

gegeben. Die Faktoren  $\sqrt{\alpha}$ , bzw.  $\sqrt{a}$  wurde eingeführt, um Abtastoperator und Dilationsoperator zusammenzufassen.

Die Periodisierungsoperatoren ergeben sich für  $L > 0$  durch

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_L : S_0(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{A}([0, L]) : \mathcal{P}_L(g)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x + kL), x \in [0, L], \\ \mathcal{P}_M : \mathcal{A}([0, ML]) &\rightarrow \mathcal{A}([0, L]) : \mathcal{P}_M(g)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x + kM), x \in [0, L], \\ \mathcal{P}_L : \ell^1(\mathbb{Z}) &\rightarrow \mathbb{C}^L : \mathcal{P}_L(g)(j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(j + kL), j = 0, \dots, L-1, \\ \mathcal{P}_M : \mathbb{C}^{ML} &\rightarrow \mathbb{C}^L : \mathcal{P}_M(g)(j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(j + kM), j = 0, \dots, L-1, \end{aligned}$$

## 6.5 Gaborssysteme

Nachdem die Translations- und Modulationsoperatoren definiert wurden, können wir auch Gaborssysteme für die jeweiligen Räume definieren:

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}) : \mathcal{G}(g, a, b) &= \{\mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}g\}_{m, n \in \mathbb{Z}}, \text{ wobei } g \in L^2(\mathbb{R}) \text{ und } a, b > 0, \\ L^2([0, L]) : \mathcal{G}(g, \alpha, \beta) &= \{\mathcal{E}_{m\beta}\mathcal{T}_{n\alpha}g\}_{m \in \mathbb{Z}, n=0, \dots, N-1}, \\ &\text{ wobei } g \in L^2([0, L]), a, b, N \in \mathbb{N} \text{ und } L = N\alpha, \\ \ell^2(\mathbb{Z}) : \mathcal{G}(g, \alpha, 1/M) &= \{\mathcal{E}_{m/M}\mathcal{T}_{n\alpha}g\}_{m=0, \dots, M-1, n \in \mathbb{Z}}, \text{ für } g \in \ell^2(\mathbb{Z}) \text{ und } \alpha, M \in \mathbb{N}, \\ \mathbb{C}^L : \mathcal{G}(g, \alpha, \beta) &= \{\mathcal{E}_{m\beta}\mathcal{T}_{n\alpha}g\}_{m=0, \dots, M-1, n=0, \dots, N-1}, \\ &\text{ mit } g \in \mathbb{C}^L, \alpha, \beta, M, N \in \mathbb{N} \text{ und } Mb = Na = L. \end{aligned}$$

Zur Summierbarkeit der Gaboroeffizienten ergibt sich

$S_0(\mathbb{R})$ : Seien  $f, g \in S_0(\mathbb{R})$  und  $a, b > 0$ . Dann gilt:

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \mathcal{E}_{mb} \mathcal{T}_{na} g \rangle| < \infty.$$

$\mathcal{A}([0, L])$ : Seien  $f, g \in \mathcal{A}([0, L])$  und  $N, \beta \in \mathbb{N}$  mit  $L = Na$ . Dann gilt:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{N-1} |\langle f, \mathcal{E}_{m\beta} \mathcal{T}_{na} g \rangle| < \infty.$$

$\ell^1(\mathbb{Z})$ : Seien  $f, g \in \ell^1(\mathbb{Z})$  und  $\alpha, M \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \mathcal{E}_{m/M} \mathcal{T}_{na} g \rangle| < \infty.$$

### 6.5.1 Wexler-Raz

Zur Erinnerung: Das Wexler-Raz Theorem gibt uns ein einfaches Kriterium zu zeigen, wann zwei Besselfolgen  $\mathcal{G}(g, a, b)$  und  $\mathcal{G}(h, a, b)$  duale Frames bilden. In den verschiedenen Räumen lautet es:

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}) &: \frac{1}{ab} \langle h, \mathcal{E}_{m/a} \mathcal{T}_{n/b} g \rangle = \delta_m \delta_n, m, n \in \mathbb{Z} \\ L^2([0, L]) &: \frac{N}{\beta} \langle h, \mathcal{E}_{mN} \mathcal{T}_{nM/L} g \rangle = \delta_m \delta_n, m \in \mathbb{Z}, n = 0, \dots, \beta - 1, \\ \ell^2(\mathbb{Z}) &: \frac{M}{\alpha} \langle h, \mathcal{E}_{m/\alpha} \mathcal{T}_{nM} g \rangle = \delta_m \delta_n, m = 0, \dots, \alpha - 1, n \in \mathbb{Z}, \\ \mathbb{C}^L &: \frac{MN}{L} \langle h, \mathcal{E}_{mN} \mathcal{T}_{nM} g \rangle = \delta_m \delta_n, m = 0, \dots, \alpha - 1, n = 0, \dots, \beta - 1, \end{aligned}$$

wobei  $a, b > 0$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}, L = N\alpha = M\beta$ .

## 6.6 Zusammenhang der Frames zwischen den Räumen

Angenommen wir haben einen Frame  $\mathcal{G}(g, a, b)$  in einem Raum, und wollen diesen Frame mittels Periodisierung und Abtasten in einen der drei anderen Räume transformieren. Die nächsten Abschnitte stellen einen Zusammenhang zwischen den Gaborparametern in den jeweiligen Räumen her. Es ist anzumerken, dass die meisten Bedingungen hinreichend, aber nicht unbedingt notwendig sind.

### 6.6.1 $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$

**Theorem 6.6.1.** Seien  $g \in S_0(\mathbb{R}), M, a \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{G}(g, a, \frac{1}{M})$  ein Gaborframe in  $L^2(\mathbb{R})$  mit kanonischem dualen Fenster  $\tilde{g}$  und Frameschranken  $A, B > 0$ .

Dann ist  $\mathcal{G}(\mathcal{S}_1 g, a, \frac{1}{M})$  ein Gaborframe für  $\ell^2(\mathbb{Z})$  mit den selben Frameschranken und mit dem kanonischen dualen Fenster  $\mathcal{S}_1 \tilde{g}$ .

Der obige Satz deckt nur die Abtastung von  $g$  an ganzzahligen Stellen ab, und kann mit Hilfe des Dilationsoperators verallgemeinert werden:

**Theorem 6.6.2.** Seien  $g \in S_0(\mathbb{R})$ ,  $a, b > 0$  mit  $ab = \frac{\alpha}{M}$  für gegebene  $\alpha, M \in \mathbb{N}$ , und  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Gaborframe in  $L^2(\mathbb{R})$  mit kanonischem dualen Fenster  $\tilde{g}$  und Frameschranken  $A, B$ .

Dann ist  $\mathcal{G}(\mathcal{S}_{a/\alpha}, \alpha, \frac{1}{M})$  ein Gaborframe für  $\ell^2(\mathbb{Z})$  mit selben Frameschranken und kanonischem dualen Fenster  $\mathcal{S}_{a/\alpha}\tilde{g}$ .

Es ist sogar möglich, einen Zusammenhang, zwischen den einzelnen Framekoeffizienten herzustellen

**Theorem 6.6.3.** Seien  $f, \tilde{g} \in S_0(\mathbb{R})$ ,  $a, b > 0$  mit  $ab = \frac{\alpha}{M}$  für  $\alpha, M \in \mathbb{N}$ . Seien  $c_{mn}$  und  $d_{mn}$  Framekoeffizienten der jeweiligen Darstellung

$$\begin{aligned} c_{mn} &= \langle f, \mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}\tilde{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \\ d_{mn} &= \langle \mathcal{S}_{a/\alpha}f, \mathcal{E}_{m/M}\mathcal{T}_{n\alpha}\mathcal{S}_{a/\alpha}\tilde{g} \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}, \quad m = 0, \dots, M-1, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$d_{mn} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{m-jM, n}, \quad m = 0, \dots, M-1, n \in \mathbb{Z}.$$

*Beweis.* Durch die Voraussetzungen im Satz und weil die Systeme Frames sind ist  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{m-jM, n}$  konvergent. Nun gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{m-jM, n} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \mathcal{E}_{(m-jM)b}\mathcal{T}_{na}\tilde{g} \rangle = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle \mathcal{D}_{a/\alpha}f, \mathcal{E}_{(m/M-j)b}\mathcal{T}_{n\alpha}\mathcal{D}_{a/\alpha}\tilde{g} \rangle = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_{a/\alpha}f(\mathcal{E}_{m/M}\mathcal{T}_{n\alpha}\mathcal{D}_{a/\alpha}\tilde{g}(x))^* e^{2\pi i j x} dx = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(\mathcal{D}_{a/\alpha}f(\mathcal{E}_{m/M}\mathcal{T}_{n\alpha}\mathcal{D}_{a/\alpha}\tilde{g}(x))^*)(-j) = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(\mathcal{D}_{a/\alpha}f(\mathcal{E}_{m/M}\mathcal{T}_{n\alpha}\mathcal{D}_{a/\alpha}\tilde{g}(x))^*)(j). \end{aligned}$$

Mit der Poisson'sche Summenformel

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{m-jM, n} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_{a/\alpha}f(\mathcal{E}_{m/M}\mathcal{T}_{n\alpha}\mathcal{D}_{a/\alpha}\tilde{g})^*(k) = \\ &= \langle \mathcal{S}_{a/\alpha}f, \mathcal{E}_{m/M}\mathcal{T}_{n\alpha}\mathcal{S}_{a/\alpha}\tilde{g} \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = d_{mn}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung:** Der obige Satz beschränkt sich nicht nur auf das kanonische duale Fenster, sondern kann auf *alle* dualen Fenster erweitert werden.

**Bemerkung:** Es sei darüber hinaus noch angemerkt, dass es sich bei einem Gaborframe in  $\ell^2(\mathbb{Z})$  wiederum um ein shiftinvariantes System handelt, und sich die Bedingungen in dieser Hinsicht von  $L^2(\mathbb{R})$  auf  $\ell^2(\mathbb{Z})$  übertragen, d.h. es ist wieder möglich die  $N \times M$  Matrix

$$H_g(\nu) = (\hat{g}_m(\nu - k/N))_{k=0, \dots, N-1, m=0, \dots, M-1}$$

zu betrachten:

**Theorem 6.6.4.**  $\{g_{nm}\}$  ist genau dann eine Besselfolge in  $\ell^2(\mathbb{Z})$  mit Schranke  $B$ , wenn  $H_g(\nu)$  für fast alle  $\nu \in \mathbb{R}$  eine beschränkte lineare Abbildung von  $\mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^N$  mit Norm  $\leq \sqrt{NB}$  ist.

Die Besselfolge ist genau dann ein Frame für  $\ell^2(\mathbb{Z})$  mit unterer Schranke  $A$ , wenn

$$NAI \leq H_g(\nu)H_g^*(\nu)$$

für fast alle  $\nu \in \mathbb{R}$  gilt.

Die Bedingungen für duale System lassen sich ebenfalls direkt übertragen.

### 6.6.2 $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2([0, L])$

**Theorem 6.6.5.** Seien  $g \in S_0(\mathbb{R})$ ,  $a, b > 0$  mit  $ab = \frac{\beta}{N}$  für  $N, b \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Gaborframe in  $L^2(\mathbb{R})$  mit Frameschranken  $A, B$  und kanonischem dualen Fenster  $\tilde{g}$ .

Dann ist  $\mathcal{G}(\mathcal{P}_{\beta/b}g, a, \beta)$  ein Gaborframe für  $L^2([0, \frac{\beta}{b}])$  mit den selben Frameschranken und dem kanonischen dualen Fenster  $\mathcal{P}_{\beta/b}\tilde{g}$ .

**Theorem 6.6.6.** Seien  $f, \tilde{g} \in S_0(\mathbb{R})$ ,  $a, b, > 0$  mit  $ab = \frac{\beta}{N}$  für  $\beta, N \in \mathbb{N}$  und  $c_{mn}$  und  $d_{mn}$  die jeweiligen Framekoeffizienten

$$\begin{aligned} c_{mn} &= \langle f, \mathcal{E}_{mb}\mathcal{T}_{na}\tilde{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, m, n \in \mathbb{Z}, \\ d_{mn} &= \langle \mathcal{P}_{\beta/b}f, \mathcal{E}_{m\beta}\mathcal{T}_{n\alpha}\mathcal{P}_{\beta/b}\tilde{g} \rangle_{L^2(0, \beta/b)}, m \in \mathbb{Z}, n = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$d_{mn} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{m, n-jN}, m \in \mathbb{Z}, n = 0, \dots, N-1.$$

**Theorem 6.6.7.** Seien  $g \in S_0(\mathbb{R})$ ,  $a, b > 0$  mit  $ab = \frac{\beta}{N}$  für  $\beta, N \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Gaborframe in  $L^2(\mathbb{R})$  mit dualem Fenster  $h \in S_0(\mathbb{R})$ . Dann ist  $\mathcal{P}_{\beta/b}h$  ein duales Fenster für  $\mathcal{G}(\mathcal{P}_{\beta/b}g, a, \beta)$ .

### 6.6.3 $L^2([0, L]) \rightarrow \mathbb{C}^L$

**Theorem 6.6.8.** Seien  $g \in \mathcal{A}([0, L])$ ,  $L, M, N, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$  mit  $L = M\beta = N\alpha$  und  $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$  ein Gaborframe in  $L^2([0, L])$  mit kanonischem dual Fenster  $\tilde{g}$  und Frameschranken  $A, B$ .

Dann ist  $\mathcal{G}(\mathcal{S}_1g, \alpha, \beta)$  ein Gaborframe für  $\mathbb{C}^L$  mit den gleichen Frameschranken und dem kanonischen dualen Fenster  $\mathcal{S}_1\tilde{g}$ .

Der obige Satz kann auf andere Abtastintervalle verallgemeinert werden:

**Theorem 6.6.9.** Seien  $g \in \mathcal{A}([0, L_1])$ ,  $L_2, M, N, \alpha_2, \beta \in \mathbb{N}$  mit  $L_1 = N\alpha_1, L_2 = M\beta = N\alpha_2$  und  $\mathcal{G}(g, \alpha_1, \beta)$  ein Gaborframe in  $L^2([0, L_1])$  mit kanonischem dual Fenster  $\tilde{g}$  und Frameschranken  $A, B$ .

Dann ist  $\mathcal{G}(\mathcal{S}_{L_1/L_2}g, \alpha_2, \beta)$  ein Gaborframe für  $\mathbb{C}^{L_2}$  mit den gleichen Frameschranken und dem kanonischen dualen Fenster  $\mathcal{S}_{L_1/L_2}\tilde{g}$ .

Für die Koeffizienten einer Darstellung gilt wieder

**Theorem 6.6.10.** Seien  $f, \tilde{g} \in \mathcal{A}([0, L_1])$ ,  $L_2, M, N, \alpha_2, b \in \mathbb{N}$  mit  $L_1 = N\alpha_1$  und  $L_2 = Mb = N\alpha_2$ . Seien  $c_{mn}$  und  $d_{mn}$  Koeffizienten einer Framedarstellung

$$\begin{aligned} c_{mn} &= \langle f, \mathcal{E}_{m\beta} \mathcal{T}_{n\alpha_1} \tilde{g} \rangle_{L^2([0, L_1])}, m \in \mathbb{Z}, n = 0, \dots, N-1 \\ d_{mn} &= \langle \mathcal{S}_{L_1/L_2} f, \mathcal{E}_{m\beta} \mathcal{T}_{n\alpha_2} \mathcal{S}_{L_1/L_2} \tilde{g} \rangle_{\mathbb{C}^L}, m = 0, \dots, M-1, n = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$d_{mn} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{m-jM, n}, m = 0, \dots, M-1, n = 0, \dots, N-1.$$

Für duale Fenster gilt:

**Theorem 6.6.11.** Seine  $g \in \mathcal{A}([0, L_1])$ ,  $L_2, M, N, \alpha_2, \beta \in \mathbb{N}$  mit  $L_1 = Na_1$  und  $L_2 = M\beta = N\alpha_2$  und  $\mathcal{G}(g, \alpha_1, n)$  ein Gaborframe in  $L^2([0, L_1])$  und  $h \in \mathcal{A}([0, L_1])$  ein duales Fenster. Dann ist  $\mathcal{S}_{L_1/L_2}h$  ein duales Fenster für  $\mathcal{G}(\mathcal{S}_{L_1/L_2}g, \alpha_2, b)$ .

### 6.6.4 $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^L$

**Theorem 6.6.12.** Seien  $g \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ,  $M, N, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$  mit  $M\beta = N\alpha = L$  und  $\mathcal{G}(g, \alpha, \frac{1}{M})$  ein Gaborframe für  $\ell^2(\mathbb{Z})$  mit kanonischem Dualfenster  $\tilde{g}$  und Frameschranken  $A, B > 0$ .

Dann ist  $\mathcal{G}(\mathcal{P}_L g, \alpha, \beta)$  ein Gaborframe für  $\mathbb{C}^L$  mit den gleiche Frameschranken und mit kanonischem Dualfenster  $\mathcal{P}_L \tilde{g}$ .

**Theorem 6.6.13.** Seien  $f, \tilde{g} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ,  $M, N, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$  mit  $L = M\beta = N\alpha$ . Seien  $c_{mn}$  und  $d_{mn}$  Koeffizienten einer Framedarstellung

$$\begin{aligned} c_{mn} &= \langle f, \mathcal{E}_{m\beta} \mathcal{T}_{n\alpha} \tilde{g} \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}, n \in \mathbb{Z}, m = 0, \dots, M-1 \\ d_{mn} &= \langle \mathcal{P}_L f, \mathcal{E}_{m\beta} \mathcal{T}_{n\alpha} \mathcal{P}_L \tilde{g} \rangle_{\mathbb{C}^L}, m = 0, \dots, M-1, n = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$d_{mn} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{m, n-jN}, m = 0, \dots, M-1, n = 0, \dots, N-1.$$

**Theorem 6.6.14.** Seien  $g \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ,  $M, N, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$  mit  $M\beta = N\alpha = L$ . Sei  $\mathcal{G}(g, \alpha, \frac{1}{M})$  ein Gaborframe für  $\ell^2(\mathbb{Z})$  mit Dualfenster  $h \in \ell^1$ . Dann ist  $\mathcal{P}_L h$  ein duales Fenster für  $\mathcal{G}(\mathcal{P}_L g, a, b)$ .

## 6.7 $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^L$

**Theorem 6.7.1.** Seien  $g \in S_0(\mathbb{R})$ ,  $ab = \frac{\beta}{N} = \frac{\alpha}{M}$  und  $M\beta = N\alpha = L$  mit  $\alpha, \beta, M, N, L \in \mathbb{N}$ . Sei  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Gaborframe für  $L^2(\mathbb{R})$  mit Frameschranken  $A, B$  und kanonischem Dualfenster  $\tilde{g}$ .

Dann ist  $\mathcal{G}(\mathcal{P}_L \mathcal{S}_{a/\alpha} g, \alpha, \beta)$  ein Gaborframe für  $\mathbb{C}^L$  mit den gleichen Frameschranken und dem kanonischen dualen Fenster  $\mathcal{P}_L \mathcal{S}_{a/\alpha} \tilde{g}$ .

**Theorem 6.7.2.** Seien  $f, \tilde{g} \in S_0(\mathbb{R})$ ,  $a, b > 0$  mit  $ab = \frac{\beta}{N} = \frac{\alpha}{M}$  und  $M\beta = M\alpha = L$  mit  $\alpha, \beta, M, N, L \in \mathbb{N}$ . Seien  $c_{mn}$  und  $d_{mn}$  Koeffizienten einer Framedarstellung

$$c_{mn} = \langle f, \mathcal{E}_{mb} \mathcal{T}_{na} \tilde{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, m, n \in \mathbb{Z}$$

$$d_{mn} = \langle \mathcal{P}_L \mathcal{S}_{a/\alpha} f, \mathcal{E}_{m\beta} \mathcal{T}_{n\alpha} \mathcal{P}_L \mathcal{S}_{a/\alpha} \tilde{g} \rangle_{\mathbb{C}L}, m = 0, \dots, M-1, n = 0, \dots, N-1.$$

Dann gilt

$$d_{mn} = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{m-kM, n-jN}, m = 0, \dots, M-1, n = 0, \dots, N-1.$$

**Theorem 6.7.3.** Seien  $g \in S_0(\mathbb{R})$ ,  $ab = \frac{\beta}{N} = \frac{\alpha}{M}$  und  $M\beta = M\alpha = L$  mit  $\alpha, \beta, M, N, L \in \mathbb{N}$ . Sei  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Gaborframe in  $L^2(\mathbb{R})$  mit dualem Fenster  $h \in S_0(\mathbb{R})$ . Dann ist  $\mathcal{P}_L \mathcal{S}_{a/\alpha} h$  ein duales Fenster für  $\mathcal{G}(\mathcal{P}_L \mathcal{S}_{a/\alpha} g, \alpha, \beta)$ .

# Anhang A

## Nützliche Dinge

### A.1 Zur Erinnerung: Definition und Sätze aus der linearen Algebra

#### A.1.1 Vektorraum

**Definition A.1.1** (Vektorraum). Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ . Die Norm auf  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  mit

$$(i) \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0,$$

$$(ii) \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \forall v \in V, \alpha \in \mathbb{C},$$

$$(iii) \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \forall v, w \in V.$$

#### A.1.2 Konvergenz

Eine Folge  $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$  von Vektoren *konvergiert* gegen  $v$  wenn

$$\|v - v_k\| \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Eine Folge heißt *Cauchyfolge*, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, sodass

$$\|v_k - v_j\| \leq \varepsilon \text{ wenn } k, j \geq N.$$

Jede konvergente Folge ist automatisch eine Cauchyfolge, die umgekehrte Richtung gilt nur in *vollständigen* Räumen. Ein vollständiger Vektorraum mit Norm wird auch *Banachraum* genannt.

Eine Teilmenge  $W \subset V$  heißt *dicht* in  $V$ , wenn es für jedes  $v \in V$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $w \in W$  gibt, sodass

$$\|v - w\| \leq \varepsilon.$$

Für eine (möglicherweise unendliche) Folge  $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$  wird die *lineare Hülle*  $\text{span}\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$  als die Menge aller *endlichen* linear Kombinationen von Vektoren  $v_k$  definiert. Eine Folge  $\{v_k\}_{k \in I}$ , für die

$$\overline{\text{span}\{v_k\}_{k=1}^{\infty}} = V$$

gilt, heißt *vollständige* Folge. Ein normierter Vektorraum  $V$ , der eine abzählbare und dichte Teilmenge besitzt, heißt *separabel*.

Eine lineare Abbildung  $U$  zwischen Banachräumen  $V$  und  $W$  (Operator) heißt *beschränkt* oder *stetig*, wenn es eine Konstant  $C$  gibt, sodass

$$\|Uv\|_W \leq C\|v\|_V, \forall v \in V.$$

Die Norm eines Operators wird über die Einheitskugel definiert und ist

$$\|U\| := \sup_{\|v\|=1} \|Uv\|.$$

**Theorem A.1.2** (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). *Sei  $U_n$  eine Folge von beschränkten Operatoren, die punktweise gegen eine Abbildung  $U$  konvergiert. Dann ist auch  $U$  linear und beschränkt. Darüber hinaus ist die Folge der Normen  $\|U_n\|$  beschränkt und  $\|U\| \leq \liminf \|U_n\|$ .*

**Theorem A.1.3.** *Ein beschränkter linearer Operator zwischen zwei Banachräumen hat ein beschränktes Inverses.*

**Theorem A.1.4** (Satz von Neumann). *Sei  $U : V \rightarrow V$  ein beschränkter Operator für den  $\|U - Id\| < 1$  gilt. Dann ist  $U$  invertierbar und*

$$U^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (Id - U)^k.$$

### A.1.3 Hilbertraum

**Definition A.1.5** (Hilbertraum und inneres Produkt). *Ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  ist ein Banachraum, dessen Norm durch ein inneres Produkt induziert wird. Ein inneres Produkt ist eine Abbildung von  $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  mit*

$$(i) \quad \langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle,$$

$$(ii) \quad \langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle},$$

$$(iii) \quad \langle v, v \rangle \geq 0, \forall v \in \mathcal{H}, \text{ wobei } \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

*Jeder Vektorraum mit innerem Produkt kann auf diese Weise mit einer Norm*

$$\|v\| := (\langle v, v \rangle)^{1/2}$$

*versehen werden.*

**Theorem A.1.6** (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung). *Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum, dann gilt:*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|, \forall v, w \in \mathcal{H}, \tag{A.1}$$

Das *orthogonale* Komplement eines Unterraums  $U \subset \mathcal{H}$  wird über

$$U^\perp = \{w \in \mathcal{H} : \langle v, w \rangle = 0, \forall v \in U\}.$$

Ein wichtiger Satz für Hilberträume ist der Riesz'sche Darstellungssatz

**Theorem A.1.7** (Rieszscher Darstellungssatz). *Sei  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige lineare Abbildung. Dann existiert ein eindeutiges  $w \in \mathcal{H}$  mit*

$$Av = \langle v, w \rangle, \forall v \in \mathcal{H}.$$

Damit folgt aber auch gleich

$$\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle, \forall w \in \mathcal{H} \Leftrightarrow u = v.$$

In Hilberträumen gibt es auch einen netten Zusammenhang zwischen der Norm eines Vektors und dem inneren Produkt über die Einheitskugel

**Lemma A.1.8.** *Für jedes  $v \in \mathcal{H}$  gilt:*

$$\|v\| = \sup_{\|w\|=1} |\langle v, w \rangle|.$$

*Beweis.* Die eine Richtung ergibt sich aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung. Für die zweite Richtung verwenden wir

$$\|v\|^2 = |\langle v, v \rangle| = \|v\| \left| \left\langle v, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \right|.$$

□

## A.1.4 Operatoren

**Definition A.1.9** (Adjungierter Operator). *Für einen beschränkten Operator  $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  zwischen zwei Hilberträumen wird der adjungierte Operator  $U^*$  als der eindeutige Operator definiert, für den gilt:*

$$\langle U^*v, w \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle v, Uw \rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

**Lemma A.1.10.** *Sei  $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  ein beschränkter Operator. Dann gilt:*

$$(i) \|U\| = \|U^*\|, \|UU^*\| = \|U\|^2,$$

(ii) *Der Wertebereich  $\mathcal{R}(U)$  von  $U$  ist genau dann in  $\mathcal{H}_2$  abgeschlossen, wenn der Wertebereich  $\mathcal{R}(U^*)$  in  $\mathcal{H}_1$  abgeschlossen ist.*

**Definition A.1.11.** *Ein beschränkter Operator  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  heißt unitär, wenn*

$$UU^* = U^*U = Id,$$

bzw. wenn

$$\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle.$$

*Der Operator heißt selbst adjungiert, wenn  $U^* = U$ . In diesem Fall gilt auch*

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ux, x \rangle|.$$

Wenn wir mittels

$$U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow \langle U_1v, v \rangle \leq \langle U_2v, v \rangle, \forall v \in \mathcal{H}$$

eine Ordnung einführen gilt außerdem

**Lemma A.1.12.** Seien  $U_1, U_2$ , und  $U_3$  selbst adjungierte Operatoren,  $U_1 \leq U_2$ , und  $U_3 \geq 0$ . Wenn  $U_3$  mit  $U_1$  und  $U_2$  kommutativ ist, dann gilt auch  $U_1 U_3 \leq U_2 U_3$ .

**Lemma A.1.13.** Sei  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ein beschränkter Operator mit  $\langle Uv, v \rangle = 0$ . Dann ist  $U = 0$  falls

(i)  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{C}$  ist,

(ii)  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{R}$  ist, und  $U$  selbst adjungiert ist.

*Beweis.* Im Fall eines komplexen Vektorraums benutzen wir

$$4 \langle Uv, w \rangle = \langle U(v+w), v+w \rangle - \langle U(v-w), v-w \rangle + \\ + i \langle U(v+iw), v+iw \rangle - i \langle U(v-iw), v-iw \rangle.$$

Das bedeutet, es ist  $\langle Uv, v \rangle = 0$  für alle  $v \in V$ , so ist  $\langle Uv, w \rangle = 0$  für alle  $w \in \mathcal{H}$  und damit  $U = 0$ .

Für einen reellen Vektorraum arbeiten wir über die orthonormale Basis  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  des Hilbertraums<sup>1</sup>

$$0 = \langle U(e_k + e_j), e_k + e_j \rangle = \langle Ue_k, e_k \rangle + \langle Ue_j, e_j \rangle + \langle Ue_k, e_j \rangle + \langle Ue_j, e_k \rangle = \\ = \langle Ue_k, e_j \rangle + \langle e_j, Ue_k \rangle = 2 \langle Ue_k, e_j \rangle$$

Der Rest folgt z.B. aus dem Riesz'schen Darstellungssatz. □

Das im reellen Fall die Selbstadjungiertheit von  $U$  wichtig ist, zeigt das Beispiel von  $\mathbb{R}^2$  und

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### A.1.5 Pseudoinverse und orthogonale Projektion

**Definition A.1.14.** Ein Operator heißt positiv, wenn  $\langle Uv, v \rangle \geq 0, \forall v \in \mathcal{H}$ , in diesem Fall lässt sich die Wurzel als Operator  $W^2 = U$  definieren.

**Definition A.1.15.** Für einen beschränkten Operator  $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  wird die Funktion  $U^\dagger : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$  mit  $UU^\dagger v = v, \forall v \in \mathcal{R}(U)$  (Rechts)Pseudoinverse des Operator  $U$  genannt.  $\mathcal{R}(U)$  definiert hierbei den Wertebereich von  $U$ .

Es kann darüber hinaus gezeigt werden, dass jeder beschränkte Operator  $U$  eine Pseudoinverse besitzt.

**Lemma A.1.16.** Sei  $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  ein beschränkter Operator mit abgeschlossenem Wertebereich. Dann gilt

- (i) Die orthogonale Projektion von  $\mathcal{H}_2$  auf  $\mathcal{R}(U)$  ist durch  $UU^\dagger$  gegeben,
- (ii) Die orthogonale Projektion von  $\mathcal{H}_1$  auf  $\mathcal{R}(U^\dagger)$  ist durch  $U^\dagger U$  gegeben,
- (iii)  $U^*$  hat einen abgeschlossenen Wertebereich und  $(U^*)^\dagger = (U^\dagger)^*$ ,
- (iv) Auf  $\mathcal{R}(U)$  lässt sich die Pseudoinverse über

$$U^\dagger = U^*(UU^*)^{-1}$$

definieren.

---

<sup>1</sup>Jeder Hilbertraum hat eine Basis und durch das innere Produkt kann eine Orthonormalisierung (vgl. Gram Schmidt) durchgeführt werden.

## A.2 Vertauschbarkeit von Operatoren

Hin und wieder werden wir für Beweise Limes, Summe und Integrale vertauschen müssen. Im Folgenden werden *hinreichende* Kriterien angegeben, wann dies erlaubt ist.

### A.2.1 Vertausch Integral und Summe

**Lemma A.2.1** (Fatou). *Sei  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge messbarer Funktionen. Dann ist auch  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  messbar, und es gilt:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx.$$

**Theorem A.2.2** (Majorantenkriterium). *Seien  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$  und  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  zwei komplexwertige Folgen. Gilt  $|c_k| \leq g_k$ , dann folgt, dass  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ . Gilt darüber hinaus  $\sum_{k=1}^{\infty} g_k < \infty$  so ist  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$  absolut summierbar.*

**Theorem A.2.3** (Riemannscher Umordnungssatz). *Sei  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine konvergente Reihe, die aber nicht absolut konvergent ist. Dann gibt es zu jedem  $r \in \mathbb{R}$  eine Umordnung, sodass die umgeordnete Reihe gegen  $r$  konvergiert.*

**Zusammenfassend:**

Als hinreichendes Kriterium gilt: Seien  $f_k \in L^1(\Omega)$  und gilt  $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ . Gilt  $\int \sum |f_k| < \infty$ , bzw.  $\sum \int |f_k| < \infty$ , dann folgt daraus, dass

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_k(x) dx.$$

d.h. Summe und Integral darf vertauscht werden.

### A.2.2 Limes und Integral

**Theorem A.2.4** (Majorisierte Konvergenz). *Sei  $f_k \in L^1(\Omega)$  eine Folge messbarer Funktionen und gilt  $f_k \rightarrow f$  punktweise. Existiert eine Majorante  $h$ , d.h. gilt  $|f_k| \leq h$  und gilt  $\int_{\Omega} h < \infty$ , dann ist  $f$  integrierbar und*

$$\int |f - f_k| \rightarrow 0, \text{ und } \int f_k \rightarrow \int f$$

Die Familie heißt übrigens majorisiert integrierbar. Limes und Integral dürfen vertauscht werden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

### A.2.3 Vertausch Ableitung Integral

**Theorem A.2.5.** Sei  $X \in \mathbb{R}^p$  offen, und  $Y \in \mathbb{R}^q$  kompakt. Sei  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist auch

$$F : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } F(x) := \int_Y f(x, y) dy$$

stetig. Ist  $f$  stetig differenzierbar bzgl.  $x_j$ , so ist auch  $F$  stetig differenzierbar bzgl.  $x_j$ , und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy,$$

d.h. Ableitung und Integral sind vertauschbar.

D.h. insbesondere bei eigentlichen Integralen  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt: Ist  $f$  stetig auf  $[a, b] \times [c, d]$ , so ist auch

$$F(x) := \int_c^d f(x, y) dy, x \in [a, b]$$

stetig, und es gilt

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Ist  $f$  auf  $x \in [a, b]$  stetig partiell nach  $x$  differenzierbar, dann ist auch  $F$  stetig differenzierbar und

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

Seien die Funktionen  $f : [a, b] \times [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  stetig auf  $[a, b] \times [c, \infty)$ . Gibt es darüber hinaus eine Funktion  $g : [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$|f(x, y) + f_x(x, y)| \leq g(y), \forall (x, y) \in [a, b] \times (c, \infty)$$

und gilt  $\int_c^\infty g(y) dy < \infty$ , so ist

$$F(x) = \int_c^\infty f(x, y) dy, x \in [a, b]$$

stetig differenzierbar und

$$F'(x) = \int_c^\infty f_x(x, y) dy.$$

Sei  $f$  stetig auf einem Intervall  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ , so gilt

$$\int_I f(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

wobei die Integrationsreihenfolge auf der rechten Seite beliebig vertauscht werden darf.

### A.2.4 Uneigentliche Integrale erster Art

**Definition A.2.6.** Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  ein unbeschränkter Bereich und sei  $f$  über jede beschränkte Teilmenge integrierbar. Wenn für jede beliebige Bereichsfolge  $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = B$  der Limes

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} f(x) dx$$

existiert, und der Grenzwert von der Wahl der Folge unabhängig ist, sagen wir, dass das uneigentliche Integral erster Art konvergiert und setzen

$$\int_B f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} f(x) dx.$$

**Theorem A.2.7.** Sei  $f(x) \geq 0$  auf einem (unbeschränkten) Gebiet  $B$ . Dann folgt aus der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} f(x) dx$$

für eine Folge  $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$  bereits die Konvergenz des uneigentlichen Bereichsintegrals.

**Definition A.2.8.** Ein uneigentliches Integral  $\int_B f(x) dx$  heißt absolut konvergent, wenn

$$\int_B |f(x)| dx < \infty.$$

**Theorem A.2.9.** Sei  $0 \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in B$ . Konvergiert  $\int_B h(x) dx$ , so konvergiert auch  $\int_B f(x) dx$  und  $\int_B f(x) dx \leq \int_B h(x) dx$ .

**Theorem A.2.10** (Fubini-Tonelli). Sei  $f(x, y)$  auf  $A \times B$  messbar, und gilt

$$\int_{A \times B} |f(x, y)| d(x, y) < \infty$$

so gilt auch

$$\int_A \int_B f(x, y) dy dx = \int_B \int_A f(x, y) dx dy = \int_{A \times B} f(x, y) d(x, y).$$

**Theorem A.2.11** (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). Seien  $X$  ein Banachraum,  $N$  ein normierter Vektorraum und  $F$  eine Familie stetiger, linearer Operatoren von  $X \rightarrow N$ . Dann folgt aus der punktwweisen Beschränktheit

$$\sup \{ \|T(x)\| : T \in F \} < \infty \text{ für alle } x \in X$$

die gleichmäßige Beschränktheit

$$\sup \{ \|T\| : T \in F \} < \infty.$$

### A.3 Translation, Modulation und Fouriertransformation

**Definition A.3.1.** *Drei der häufigsten Operatoren in der Signalverarbeitung sind:*

**Translationsoperatoren:**  $\mathcal{T}_a : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) : f(x) \rightarrow f(x - a), a \in \mathbb{R}$ .

**Modulationsoperatoren:**  $\mathcal{E}_b : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) : f(x) \rightarrow e^{2\pi ibx} f(x), b \in \mathbb{R}$ .

**Dilationsoperatoren:**  $\mathcal{D}_\gamma : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) : f(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\gamma}} f\left(\frac{x}{\gamma}\right), \gamma \in \mathbb{R}^+$ .

**Definition A.3.2** (Fourierreihe). *Sei  $f(x)$  eine periodische Funktion mit Periodenlänge  $L$ . Die Fourierreihe für  $f(x)$  ist formal als*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \right),$$

definiert, bzw. in kompakterer komplexer Notation

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}}.$$

Die Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$  ergeben sich durch

$$c_k = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-2\pi i k \frac{x}{L}} dx. \quad (\text{A.2})$$

**Definition A.3.3** (Fouriertransformation). *Sei  $f(x)$  in ganz  $\mathbb{R}$  integrierbar, z.B.  $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ . Die Fouriertransformation  $\hat{f}(\nu) = \mathcal{F}(f)(\nu)$  von  $f(x)$  ist definiert als:*

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \nu x} dx.$$

Ist  $\hat{f}(\nu)$  integrierbar, gilt für die inverse Fouriertransformation:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu x} d\nu.$$

#### A.3.1 Einige Zusammenhänge in $L^2(\mathbb{R})$

- $\mathcal{F}(\mathcal{T}_a f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a) e^{-2\pi i \nu x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \nu (x+a)} dx = \mathcal{E}_{-a} \mathcal{F}(f)$ .
- $\mathcal{F}(\mathcal{E}_b f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i b x} e^{-2\pi i \nu x} dx = \mathcal{T}_b \mathcal{F}(f)$ .
- $\mathcal{F}(\mathcal{D}_c f) = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x/c) e^{-2\pi i \nu x} dx = \sqrt{c} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \nu c x} dx = \mathcal{D}_{1/c} \mathcal{F}(f)$ .
- $\mathcal{F}(f^*) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) e^{-2\pi i \nu x} dx = \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i \nu x} dx \right)^* = \mathcal{F}(f)^*(-\nu)$ .

- $\mathcal{F}(\hat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) e^{-2\pi i \nu x} d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu (-x)} d\nu = f(-x).$
- $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$
- $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$
- $\mathcal{T}_a \mathcal{E}_b f = T_a (e^{2\pi i b x} f(x)) = e^{2\pi i b (x-a)} f(x-a) = e^{-2\pi i b a} \mathcal{E}_b \mathcal{T}_a f.$
- $\mathcal{D}_c \mathcal{E}_b f = \mathcal{D}_c e^{2\pi i b x} f(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} e^{2\pi i b / c x} f(x/c) = \mathcal{E}_{b/c} \mathcal{D}_c f.$
- $\mathcal{D}_c \mathcal{T}_a f = \mathcal{D}_c f(x-a) = \frac{1}{\sqrt{c}} f(x/c-a) = \frac{1}{\sqrt{c}} f(x/c - ca/c) = \mathcal{T}_{ac} \mathcal{D}_c f.$
- $\langle \mathcal{T}_a f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) g^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x+a) dx = \langle f, \mathcal{T}_{-a} g \rangle.$
- $\langle \mathcal{E}_b f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) e^{2\pi i b x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) (e^{-2\pi i b x})^* dx = \langle f, \mathcal{E}_{-b} g \rangle.$



# Literaturverzeichnis

- [1] P. Balazs, N. Holighaus, T. Necciari, and D. T. Stoeva. Frame theory for signal processing in psychoacoustics. In *Excursions in Harmonic Analysis Vol. 5. The February Fourier Talks at the Norbert Wiener Center*, pages 225–268. Springer, Basel, 2017.
- [2] P. Balazs, C. Kasess, W. Kreuzer, T. Maly, Z. Prusa, and F. Jaillet. Anwendung von Rahmen-Multiplikatoren für die Extraktion von Kurvenquietschen von Zugsaufnahmen. *Elektrotech. Inftech*, 2021.
- [3] Z. Chen and H. Waubke. A formulation of the boundary element method for acoustic radiation and scattering from two-dimensional al structures. *Journal of Computational Acoustics*, 15(3):333 – 352, 2007.
- [4] O. Christensen. *Frames and Bases. An Introductory Course*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2008.
- [5] I. Daubechies. *Ten Lectures of Wavelets*. Springer, 1992.
- [6] Ingrid Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer. Painless nonorthogonal expansions. *Journal of Mathematical Physics*, 27(5):1271–1283, 1986.
- [7] Richard James Duffin and A. C. Schaeffer. A class of nonharmonic fourier series. *Transactions of the American Mathematical Society*, 72:341–366, 1952.
- [8] K. Gröchenig. Acceleration of the frame algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3331–3340, 1993.
- [9] A. J. E. M. Janssen. *Representations of Gabor frame operators*, pages 73–101. Springer Netherlands, Dordrecht, 2001.
- [10] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, San Diego, 01 1999.
- [11] P. Søndergaard. Gabor frames by sampling and periodization. *Advances in Computational Mathematics*, 27(4):355–373, 2007.